Journal de Ciencia e Ingeniería

Journal de Ciencia e Ingeniería, Vol.5, No.1, Agosto de 2013, pp. 95-96
Investigación - Matemáticas

Solución Particular de la Ecuación Diferencial Lineal de Orden Tres

Particular Solution of The Third Order Linear Differential Equation

R. Cruz-Santiago [a], J. López-Bonilla [a ⋆], A. Zaldívar-Sandoval [a]

[a] *ESIME-Zacatenco, IPN, Edif. 5, 1er. Piso, Col. Lindavista CP 07738, México DF*

Recibido: 23/5/2013; revisado: 12/7/2013; aceptado: 31/7/2013.

Cruz-Santiago, R., López-Bonilla, J., Zaldívar-Sandoval, A.: Solución Particular de la Ecuación Diferencial Lineal de Orden Tres. Jou.Cie.Ing. **5** (1): 95-96, 2013. ISSN 2145-2628.

Resumen

Si para $uy''' + py''' + qy' + ry = \phi$ se conocen dos soluciones de la correspondiente ecuación homogénea (EH), entonces aquí se indica cómo éstas permiten obtener la restante solución de la EH y la solución particular de la ecuación dada.

***Palabras Claves*:** Método de Euler-Lagrange, ecuación diferencial lineal, identidad de Abel-Liouville-Ostrogradski.

Abstract

If for $uy''' + py''' + qy' + ry = \phi$ we know two solutions of the corresponding homogeneous equation (HE), then we show how to obtain the other solution of the HE and the particular solution of the given equation.

***Keywords*:** Euler-Lagrange method, linear differential equation, Abel-Liouville-Ostrogradski identity.

1. Introducción

Aquí se considera la ecuación diferencial lineal de 3er. orden:

$$u(x)y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = \phi(x), \qquad (1)$$

y se conocen dos soluciones de su ecuación homogénea:

$$uy''' + py'' + qy' + ry = 0, \qquad (2)$$

denotadas por y_1 y y_2. El objetivo es determinar la restante solución y_3 de 2 y la solución particular y_p de 1; para tal fin se utiliza el enfoque desarrollado en [1–4].

2. Ecuación Diferencial Lineal de Orden Tres

Primero debe obtenerse una solución más de 2, lo cual genera un wronskiano no-nulo [5, 6] junto con la identidad de Abel-Liouville-Ostrogradski [7]:

$$W \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \end{vmatrix} = \exp\left(-\int^x \frac{p}{u} d\xi\right), \qquad (3)$$

y al desarrollar este determinante resulta la ecuación diferencial lineal de 2[do] orden:

$$W_{12}y''_3 - W'_{12}y'_3 + (y'_1y''_2 - y'_2y''_1)\, y_3 = W, \qquad (4)$$

⋆ jlopezb@ipn.mx

donde

$$W_{12} = y_1 y_2' - y_2 y_1',$$
$$W_{12}' = \frac{d}{dx} W_{12} = y_1 y_2'' - y_2 y_1''. \tag{5}$$

Con el método de variación de parámetros de Euler-Lagrange [5,6] se resuelve 4:

$$y_3(x) = y_2(x) \int^x \frac{y_1 W}{(W_{12})^2} d\eta \quad - \quad y_1(x) \int^x \frac{y_2 W}{(W_{12})^2} d\eta, \tag{6}$$

entonces pueden calcularse los wronskianos:

$$W_{31} = y_3 y_1' - y_1 y_3', \quad W_{23}' = y_2 y_3' - y_3 y_2'. \tag{7}$$

y es sencillo verificar las identidades:

$$\begin{aligned} y_1 W_{23} + y_2 W_{31} + y_3 W_{12} &= 0 \\ y_1' W_{23} + y_2' W_{31} + y_3' W_{12} &= 0 \\ y_1'' W_{23} + y_2'' W_{31} + y_3'' W_{12} &= W, \end{aligned} \tag{8}$$

que permiten construir la solución particular de 1:

$$y_p(x) = y_1(x) \int^x \frac{W_{23}\phi}{W \quad u} d\eta \quad + \quad y_2(x) \int^x \frac{W_{31}\phi}{W \quad u} d\eta \quad + \quad y_3(x) \int^x \frac{W_{12}\phi}{W \quad u} d\eta, \tag{9}$$

así 1 queda completamente resuelta.

3. Conclusiones

En [1,2] se expuso un enfoque que justificó el ansatz que Lagrange utilizó para implementar su importante método de variación de parámetros [5,6], y aquí se ha mostrado que con este método y el concepto de wronskiano [8] es posible resolver la ecuación diferencial lineal de tercer orden si de ésta se conocen dos soluciones de su ecuación homogénea. Es claro que este análisis puede extenderse a ecuaciones de más alto orden.

Referencias

[1] J. López-Bonilla, A. Zaldívar S., J. Yaljá Montiel P., Factor integrante para una arbitraria ecuación diferencial lineal de 2do. orden, Bol. Soc. Cub. Mat. Comp. 8, No. 1, 35-39, 2010.

[2] J. López-Bonilla, A. Zaldívar S., J. Yaljá Montiel P., 2th order linear differential operator in its exact form, J. Vect. Rel. 5, No. 1, 139-141, 2010.

[3] Z. Ahsan, R. Cruz S., J. López-Bonilla, Linear differential equations of third and fourth order, Aligarh Bull. Maths. 31, No. 1, 5-7, 2012.

[4] A. Hernández G., J. López-Bonilla, J. Rivera R., Second order linear differential equation in its exact form, The SciTech, J. of Sci. & Tech. 2, No. 1, 34-36, 2013.

[5] M. R. Spiegel, Ecuaciones diferenciales aplicadas, Prentice-Hall, México DF, 1983.

[6] Z. Ahsan, Differential equations and their applications, Prentice-Hall, New Delhi, 2004.

[7] L. Elsgotz, Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional, MIR, 1983.

[8] J. M. Hoene Wronski, Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange, Paris, 1812.