Journal de Ciencia e Ingeniería

Journal de Ciencia e Ingeniería, Vol.5, No.1, Agosto de 2013, pp. 20-24
Investigación - Matemáticas

Sobre el Método Tau de Lanczos-Ortiz

On the Tau Method of Lanczos-Ortiz

J. Morales [a], J. H. Caltenco [b], J. López-Bonilla [b] ⋆ B. L. Moreno-Ley [b]

[a] *CBI-Área de Física AMA, Universidad Autónoma Metroplitana-Azcapotzalco, Av. San Pablo 180, Col. Reynosa-Tamps. CP 02200, México DF*
[b] *ESIME-Zacatenco, Instituto Politecnico Nacional, Anexo Edif. 5, Col. Lindavista CP 07738 México DF*

Recibido: 2/3/2013; revisado: 22/4/2013; aceptado: 19/6/2013.

Morales, J., Caltenco, J. H., López-Bonilla, J., Moreno-Ley, B. L.: Sobre el Método Tau de Lanczos-Ortiz. Jou.Cie.Ing. **5** (1): 20-24, 2013. ISSN 2145-2628.

Resumen

Se expone el Método Tau, desarrollado por C. Lanczos y E.L. Ortiz, para la construcción de soluciones polinomiales aproximadas de ecuaciones diferenciales lineales y se realizan aplicaciones del correspondiente algoritmo.

***Palabras Claves*:** Polinomios canónicos, método tau, soluciones polinomiales de ecuaciones diferenciales lineales, polinomios de Chebyshev.

Abstract

The Tau Method due to C. Lanczos and E.L. Ortiz, to construct approximated polynomial solutions of linear differential equations, is presented with applications of the corresponding algorithm.

***Keywords*:** Canonical polynomials, Tau method, polynomial solutions of linear differential equations, Chebyshev polynomials.

1. Introducción

Considérese el problema:

$$y' + x^3 y = 0, \quad x \in [-1, 1], \quad y(0) = 1, \tag{1}$$

cuya solución exacta es $exp\left(-x^4/4\right)$. Sin embargo, si sólo se desea trabajar con una aproximación polinomial de orden cuatro entonces una opción es desarrollar esta exponencial en serie de Taylor:

$$y_{Taylor} = 1 - \frac{x^4}{4}, \tag{2}$$

pero es muy conocido que el método de Taylor aproxima bien a la solución exacta en la vecindad de su centro de expansión, en este caso $x = 0$, pero que el error crece en las zonas extremas del intervalo, es decir, en los alrededores de $x = \pm 1$. En otras palabras, **??** no aporta un error uniforme en $[-1, 1]$.

En el enfoque de Lanczos [1] se busca un polinomio de cuarto grado que distribuya uniformemente el error en el intervalo bajo estudio, y como los polinomios de Chebyshev $T_k(x)$ [2] tienen oscilación uniforme en $[-1, 1]$, entonces Lanczos propone reemplazar el miembro derecho de la ecuación homogénea **??** por una perturbación polinomial de orden siete [$y(x)$ es de grado cuatro, entonces en **??** el término x^3 y implica un polinomio de grado siete]:

⋆ jlopezb@ipn.mx

$$\widetilde{y}' + x^3\widetilde{y} = H_7\left(x\right), \quad \widetilde{y}\left(0\right) = 1, \tag{3}$$

en donde H_7 está en términos de los T_k de Chebyshev, lo cual garantiza que la solución polinomial de orden cuatro tendrá un error [respecto a la solución exacta] uniforme en $[-1, 1]$. Además, en H_7 existen parámetros τ_j, a determinar, que en general son de pequeña magnitud y que cuantifican el tamaño de esta perturbación de grado siete.

La implementación de esta idea de Lanczos [1] conduce al importante Método Tau [1,2,3,4,5,6,7,8] para la construcción de soluciones polinomiales de ecuaciones diferenciales ordinarias, el cual se expone en la Sec. 2. La Sec. 3 contiene aplicaciones de esta técnica tau, en particular, se logra un polinomio de cuarto orden que es una solución aproximada de **??**, pero que es una solución exacta de **??**, poniéndose en evidencia la filosofía del enfoque de Lanczos: resolver de manera exacta el problema perturbado para así obtener una buena solución aproximada del problema original.

2. Método Tau

Este algoritmo de Lanczos es aplicable a ecuaciones diferenciales lineales de cualquier orden, con la única condición de que sus coeficientes sean polinomios [por ejemplo, x^3 en (1)], con determinadas condiciones de frontera, en [-1,1] [lo cual no es una restricción ya que siempre puede hacerse un cambio de escala] porque en este intervalo los polinomios de Chebyshev $T_j(x)$ varían uniformemente; si el análisis es en [0,1] entonces el método tau queda intacto porque solo es necesario emplear los polinomios modificados de Chebyshev $T_k^*(x)$ [2,9] en lugar de los T_k.

Considérese el problema:

$$Dy\left(x\right) = 0, \tag{4}$$

tal que D es un operador diferencial lineal de orden α, con las condiciones iniciales:

$$y^k\left(0\right), k = 0, 1, \ldots, \alpha - 1, \tag{5}$$

Como siguiente paso se construyen los polinomios canónicos de Lanczos-Ortiz [1, 10, 11] Q_m, aclarando que *m* no significa que dicho polinomio tenga orden *m*:

$$DQ_m\left(x\right) = x^m + R_m\left(x\right), m = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

en donde los R_m son los polinomios residuales. Pero pueden existir valores $m_1, m_2, \ldots m_s$ para los cuales 6 no funcione, es decir, que no sea posible construir Q_{mj} y R_{mj} verificando 6, entonces se dice que esos Q_{mj} son polinomios indefinidos y se introduce el conjunto S que contiene a tales valores patológicos:

$$S = \left\{m_1, m_2, \ldots, m_s\right\}, \tag{7}$$

resultando que todos los polinomios residuales son combinaciones lineales de las diversas potencias $x^{mj}, j = 1, \ldots, s$:

$$\begin{aligned} R_k\left(x\right) = C_k^{m_1}x^{m_1} + C_k^{m_2}x^{m_2} + \ldots \\ + C_k^{m_s}x^{m_s}, k = 0, 1, \ldots, k\notin S, \end{aligned} \tag{8}$$

enfatizándose que en 8 se tiene $k\neq m_j$ porque los R_{mj} son indefinidos.

En esta primera exposición del método tau se acepta que el problema original 4 no tiene soluciones polinomiales finitas, lo cual excluye la existencia de polinomios canónicos múltiples, por ejemplo, si dos polinomios distintos Q_a y Q_b aportaran la misma potencia de $x, DQ_a = DQ_b = x^p$, entonces $D\left(Q_a - Q_b\right) = 0$ y asi $Q_a - Q_b$ sería una solución polinomial de 4. En la Sec. 4 se da la correspondiente extensión del método para el caso en que 4 permite soluciones polinomiales exactas.

Ahora Lanczos propone sustituir el cero en 4 por una pequeña perturbación:

$$D\widetilde{y}\left(x\right) = H_n\left(x\right), \tag{9}$$

en donde H_n es un polinomio de grado *n*, y obtener una solución polinomial exacta $\widetilde{y}(x)$ sujeta a las mismas condiciones iniciales 5:

$$\widetilde{y}^{(k)}\left(0\right) = y^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, ..., \alpha - 1, \tag{10}$$

que a su vez será una buena aproximación polinomial para el problema 4, con un error uniformemente distribuido en [-1,1] y esto último se logra si H_n se escribe en términos de los T_k de Chebyshev:

$$\begin{aligned} H_n\left(x\right) = \left(\tau_0 + \tau_1 x + \ldots + \tau_r x^r\right) T_{n-r}\left(x\right), \\ r = \alpha + s - 1, \end{aligned} \tag{11}$$

observándose la presencia de (r+1) parámetros τ_j que el propio algoritmo permite determinar y cuyas magnitudes son pequeñas porque H_n no debe alejarse mucho del cero del miembro derecho de 4. Así que la cantidad de parámetros τ_j depende del orden α del operador diferencial D y de la cardinalidad de S, es decir, de cuántos polinomios canónicos quedaron indefinidos. Además, el polinomio de Chebyshev que aparece en 11 puede escribirse en la forma:

$$T_{n-r}(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{n-r} x^{n-r}, \quad (12)$$

y sus coeficientes C_k son datos que participan en diversas ecuaciones del método tau.

Entonces la solución polinomial exacta de 9 es:

$$\widetilde{y}(x) = \sum_{m=0}^{n-r} C_m \sum_{\substack{i=0 \\ (m+i)\notin S}}^{r} \tau_i Q_{m+i}(x), \quad (13)$$

haciendo notar que $(m+i)$ no pertenece a 7 $\therefore (m+i) \neq mj, j = 1, \ldots, s$. Si en 13 se imponen las condiciones iniciales 10 resultan las restricciones:

$$\sum_{m=0}^{n-r} C_m \sum_{\substack{i=0 \\ (m+i)\neq m_j}}^{r} \tau_i Q_{m+i}^{(k)}(0) = y^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, \ldots \alpha - 1 \quad (14)$$

y cuando 13 se sustituye en 9 obteniendo las relaciones:

$$\sum_{i=0}^{r} \tau_i \left[\sum_{\substack{k=0 \\ (k+i)\in S}}^{n-r} C_k x^{k+i} - \sum_{\substack{m=0 \\ (m+i)\notin S}}^{n-r} C_m R_{m+i}(x) \right] = 0. \quad (15)$$

En 14 existen α condiciones, y en 15 hay s restricciones [porque deben igualarse a cero los coeficientes de las potencias x^q y ahí todos los valores de q están en S], haciendo un total de $\alpha + s \overset{(11)}{=} r + 1$ ecuaciones algebraicas para calcular los $(r+1)$ parámetros τ_j, quedando entonces 13 completamente determinada.

Conviene puntualizar que *n* es un dato porque debe decidirse (según el problema bajo análisis) el orden de la perturbación, y así el proceso tau da una solución polinomial exacta para 9,10, y el orden de $\widetilde{y}(x)$ no necesariamente coincide con *n*, eso depende de las estructura del operador D.

3. Aplicaciones de la Técnica Tau de Lanczos-Ortiz.

1. Considérese el problema:

$$y' + x2y = 0, y(0) = 1, x \in [-1, 1], \quad (16)$$

cuya solución exacta es $\exp\left(\frac{-x^3}{3}\right)$, y su serie de Taylor alrededor del origen da $\left(1 - \frac{x^3}{3}\right)$ como aproximación polinomial de orden tres para 16, la cual no aporta un error uniforme en [-1,1]. Entonces puede aplicarse el método tau con una perturbación de grado cinco:

$$D\widetilde{y} = H_5, \widetilde{y}(0) = 1, D = \frac{d}{dx} + x^2, \quad (17)$$

$$\alpha = 1, n = 5,$$

observándose que 16 no tiene soluciones polinomiales exactas. Con este D es sencillo ver que Q_0 y Q_1 son indefinidos, así 7 queda:

$$S = \{m_1, m_2\} = \{0, 1\} \quad (18)$$
$$s = \textit{cardinalidad de } S = 2,$$

y por 11 resulta que $r = 2$ con:

$$\begin{gathered} H_5(x) = \left(\tau_0 + \tau_1 x + \tau_2 x^2\right) T_3(x), \\ T_3(x) = -3x + 4x^3 \underset{\Rightarrow}{(8.b)} c_0 = c_2 = 0, \\ c_1 = -3, c_4 = 4 \end{gathered} \quad (19)$$

Los correspondientes polinomios canónicos se calculan mediante 6:

$$\begin{gathered} Q_2 = 1,\ R_2 = 0, Q_3 = x,\ R_3 = 1, \\ Q_4 = x^2,\ R_4 = 2x, Q_5 = x^3 - 3, R_5 = 0 \\ Q_6 = x^4 - 4x, R_6 = -4, \textit{etc.} \end{gathered} \quad (20)$$

en acuerdo con 8 porque los $R_k, k \notin S$, sólo están en términos de las potencias $x^{m_1} = x^0 = 1$ y $x^{m_2} = x$. Entonces 13 se reduce a:

$$\begin{aligned} \widetilde{y}(x) = &-3(\tau_1 + 4\tau_2) + \\ &(4\tau_0 - 3\tau_2)x + 4\tau_1 x^2 + 4\tau_2 x^3; \end{aligned} \quad (21)$$

la condición inicial $y(0) = 1$, es decir, 14 con $k = 0$, y las restricciones (10.b) aportan suficientes ecuaciones para determinar los parámetros de la perturbación 19:

$$\begin{gathered} 3(\tau_1 + 4\tau_2) = -1, \\ -4\tau_0 + 3\tau_2 = 0, \\ 3\tau_0 + 8\tau_1 = 0, \end{gathered} \quad (22)$$

de donde $\tau_0 = \frac{-8}{119}, \tau_1 = \frac{3}{119}$ y $\tau_2 = \frac{-32}{357}$, así 21 proporciona la solución exacta para 17:

$$\widetilde{y}(x) = 1 + \frac{12}{119}x^2 - \frac{128}{357}x^3, \quad (23)$$

que aproxima uniformemente en [-1,1], a la solución $\exp\left(\frac{-x^3}{3}\right)$ del problema 16, superando al polinomio $\left(1 - \frac{x^3}{3}\right)$ dado por la serie de Taylor.

2. En 2 se tiene un polinomio de orden cuatro proveniente del desarrollo de Taylor de la solución exacta $\exp(\frac{-x^4}{4})$ para el problema 1. Aquí puede implementarse el proceso tau con una perturbación de grado siete:

$$D\widetilde{y} = H_7, \widetilde{y}\,(0) = 1, \quad D = \frac{d}{dx} + x^3, \quad (24)$$
$$\alpha = 1, \qquad n = 7,$$

verificándose que (1) carece de soluciones polinomiales exactas. En este caso no están definidos Q_0, Q_1 y Q_2, entonces $S = \{m_1, m_2, m_3\} = \{0, 1, 2\}$ con $s = 3$, y de 11 resulta que $r = 3$, así:

$$H_7\,(x) = \left(\tau_0 + \tau_1 x + \tau_2 x^2 + \tau_3 x^3\right) T_4\,(x)\,,$$
$$T_4\,(x) = 1 - 8x^2 + 8x^4 (8.b) \underset{\Rightarrow}{} c_0 = 1, \quad (25)$$
$$c_1 = c_3 = 0, c_2 = -c_4 = -8.$$

Los polinomios canónicos de Lanczos-Ortiz se construyen vía 6:

$$Q_3 = 1, \qquad R_3 = 0,$$
$$Q_4 = x, \qquad R_4 = 1,$$

$$Q_5 = x^2, \qquad R_5 = 2x,$$
$$Q_6 = x^3, \qquad R_6 = 3x^2,$$

$$Q_7 = x^4 - 4, \qquad R_7 = 0, \qquad (26)$$
$$Q_8 = x^5 - 5x, \qquad R_8 = -5,$$

$$Q_9 = x^6 - 6x^2, \qquad R_9 = -12x,$$
$$Q_{10} = x^7 - 7x^3, \qquad R_{10} = -21x^2,$$

$$Q_{11} = x^8 - 8x^4 + 32, R_{11} = 0, etc.$$

y nuevamente se observa que los $R_j, j \notin S$, están en función de las potencias $x^{m_1} = 1$, $x^{m_2} = x$ y $x^{m_3} = x^2$. Así 13 implica la expresión:

$$\widetilde{y}\,(x) = (\tau_3 - 8\tau_1) + 8\,(\tau_0 - \tau_2)\,x +$$
$$8\,(\tau_1 - \tau_3)\,x^2 + 8\tau_2 x^3 + 8\tau_3\left(x^4 - 4\right), \quad (27)$$

que en unión de $\widetilde{y}\,(0) = 1$ y de 15 conduce a las restricciones:

$$8\tau_1 + 31\tau_3 = -1$$
$$, 15\tau_1 - 16\tau_3 = 0, \;\; 7\tau_0 - 8\tau_2 = 0, \qquad (28)$$
$$8\tau_0 + 23\tau_2 = 0,$$

por lo tanto $\tau_0 = \tau_2 = 0, \tau_1 = \frac{-16}{593}$ y $\tau_3 = \frac{-15}{593}$, entonces 27 da la solución polinomial exacta para el problema perturbado 24:

$$\widetilde{y}\,(x) = 1 - \frac{8}{593}\left(x^2 + 15x^4\right), \qquad (29)$$

que es una aproximación uniforme para (1), más óptima que 2 en [-1,1].

En la literatura existen muchas aplicaciones del método tau a diversas ecuaciones de importancia en Física-Matemática e Ingeniería, por ejemplo, en [7], con este método se construyen aproximaciones polinomiales finitas para la función de Bessel $J_0(x)$.

4. Extensión del Proceso Tau.

Ahora supóngase que (4.a) admite γ soluciones polinomiales exactas $y_j(x)$, entonces solo deben ajustarse algunas expresiones del método tau:

$$H_n = \left(\tau_0 + \ldots + \tau_t x^t\right) T_{n-t}, \; r = \alpha + s - 1,$$
$$t = r - \gamma,$$
$$T_{n-t} = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-t} x^{n-t},$$

$$\widetilde{y}\,(x) = \sum_{m=0}^{n-t} c_m \sum_{i=0}^{t} \tau_i Q_{m+i}\,(x) + \sum_{j=1}^{\gamma} \beta_j y_j\,(x)\,,$$
$$(m+i) \notin S$$

$$\sum_{m=0}^{n-t} c_m \sum_{i=0}^{t} \tau_i Q_{m+i}^{(k)}\,(0) +$$
$$\sum_{j=1}^{\gamma} \beta_j y_j^{(k)}\,(0) = y^{(k)}\,(0)\,, \quad (30)$$
$$k = 0, \ldots, \alpha - 1,$$

$$\sum_{i=0}^{t} \tau_i \left[\sum_{k=0}^{n-t} c_k x^{k+i} - \sum_{m=0}^{n-t} c_m R_{m+i}\,(x)\right] = 0,$$
$$(k+i) \in S, \; (m+i) \notin S$$

las cuales permiten determinar los parámetros $\tau_0, \ldots, \tau_t, \beta_1, \ldots, \beta_\gamma$. Si g_j es el grado del polinomio

y_j, entonces en 9 se recomienda utilizar una perturbación con $n > máx\{g_1, \ldots, g_\gamma\}$.

Por ejemplo, considérese el problema:

$$y^{''} - 2xy^{'} + 8y = 0,\ y(0) = 0, y^{'}(0) = 1, \quad (31)$$

$x\in[-1,1]$, en donde existe la solución polinomial exacta:

$$y_1(x) = 3 - 12x^2 + 4x^4,\ \gamma = 1, \quad (32)$$

así es recomendable que el correspondiente problema perturbado tenga $n > 4$. Al emplear 30 con $n = 5$, el algoritmo tau implica las relaciones:

$$D = \frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 8,\quad \alpha = 2, S = \{4\}, \quad (33)$$

$$s = 1,\quad r = 2,\quad t = 1,$$

$$Q_0 = \frac{1}{8},\ Q_1 = \frac{x}{6},\ Q_2 = \frac{1}{16}\left(4x^2 - 1\right),$$

$$Q_3 = \frac{1}{2}\left(x^3 - x\right),\ Q_5 = \frac{-x^5}{2} + 5x^3 - 5x,$$

$$Q_6 = \frac{-x^6}{4}, \ldots$$

$$R_k = 0, k = 0, 1, 2, 3, 5, R_6 = \frac{-15}{2}x^4, \quad (34)$$

$H_5 = (\tau_0 + \tau_1 x)\,T_4$ con T_4 dado en 25,

$$\widetilde{y}(x) = \tau_0\left(\frac{5}{8} - 2x^2\right) + \tau_1\left(\frac{-215}{6}x + 36x^3 - 4x^5\right) + \beta_1\left(4x^4 - 12x^2 + 3\right),$$

$$\tau_0 = \beta_1 = 0, \tau_1 = \frac{-6}{215},$$

obteniéndose la solución polinomial aproximada para 31:

$$\widetilde{y}(x) = x + \frac{24}{215}\left(-9x^3 + x^5\right), \quad (35)$$

con un error uniforme en [-1,1].

5. Conclusiones

Así, en el método tau el polinomio aproximativo construido con la participación de las funciones de Chebyshev tiene naturaleza global (interpolante) en un intervalo finito; el polinomio de Taylor es de carácter local (extrapolante) en la vecindad de su centro de expansión. Este proceso ha permitido [12] extender, las técnicas de aproximación a la mayoría de las funciones relevantes en Física e Ingeniería.

Referencias

[1] C. Lanczos, Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions, J. Math. Phys. 17, 123-199, 1938.

[2] C. Lanczos, Applied Analysis, Dover, NY, 1988, Chap. VII.

[3] E.L. Ortiz and P. Llorente, On the existence and construction of polynomial solutions of differential equations, Rev. Un. Mat. Argent. 23, 183-189, 1968.

[4] E.L. Ortiz, The Tau method, SIAM J. Numer. Anal. 6, No. 3, 480-492, 1969.

[5] E.L. Ortiz, Step by step tau method, Comput. Math. Appl. 1, 381-392, 1975.

[6] J.P. Coleman, The Lanczos tau method, IMA J. Appl. Maths. 17, No.1, 85-97, 1976.

[7] H. Shimauchi, On an approximation of Bessel function by the tau method, Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu Univ. Ser. A, 33, No.1, 173-178, 1979.

[8] R.B. Adeniyi, On the tau method for numerical solution of ordinary differential equation, Ph. D. Thesis, University of Ilorin, Nigeria, 1999.

[9] J.H. Caltenco, J. López-Bonilla, M. Martínez and R. Peña, Pascal triangle for the shifted Chebyshev-Lanczos polynomials, J. Bangladesh Acad. Sci. 26, No. 1, 115-118, 2002.

[10] E.L. Ortiz, On the generation of the canonical polynomials associated with certain linear differential operators, Res. Rep. Imperial College, London, 1-22, 1964.

[11] E.L. Ortiz, Canonical polynomials in the Lanczos tau method, in Studies in numerical analysis, Ed. B.K.P. Scaife, Academic Press, NY, 1974, 73-93.

[12] B. Gellai, The intrinsic nature of things. The life and science of Cornelius Lanczos, Am. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2010.