Journal de Ciencia e Ingeniería, Vol.5, No.1, Agosto de 2013, pp. 42-43
Investigación - Matemáticas

Vectores Tipo-Tiempo Constantes en un R_4 Vacío Arbitrario

Constant Time-Like Vectors in an Arbitrary Empty R_4

H. E. Caicedo-Ortiz [a]⋆ J. López-Bonilla [b]⋆⋆, R. López-Vázquez [b]

[a]*Facultad de Ingeniería, Corporación Universitaria Autónoma del Cauca, Calle 5 No. 3-85, Popayán, Colombia.*
[b]*ESIME-Zacatenco, Instituto Politecnico Nacional, Anexo Edif. 5, Col. Lindavista CP 07738 México D.F.*

Recibido: 2/5/2013; revisado: 11/7/2013; aceptado: 27/7/2013.

Caicedo-Ortiz, H.E., López-Bonilla, J., López-Vázquez, R.: Vectores Tipo-Tiempo Constantes en un R_4 Vacío Arbitrario. Jou.Cie.Ing. **5** (1): 42-43, 2013. ISSN 2145-2628.

Resumen

Se emplea el invariante de Synge para demostrar que ningún espacio-tiempo vacío (excepto el de Minkowski) acepta vectores temporales constantes.

***Palabras Claves*:** Invariante de Synge, vectores tipo-tiempo constantes, espacio-tiempo vacío.

Abstract

We employ the Synge invariant to show that any vacuum space-time must be Minkowskian to admit a constant time-like vector.

***Keywords*:** Synge's invariant, constant time-like vectors, empty space-time.

1. Introducción

Synge [1] construyó un invariante que al ser nulo en un evento del espacio-tiempo implica que ahí es cero el tensor de curvatura. Este resultado es sorprendente porque significa que un escalar nulo hace cero a las veinte componentes independientes del tensor de Riemann [2]. Sea:

$$H = \frac{1}{20}H_0 + \frac{23}{60}H_2 + \frac{39}{10}H_4, \qquad (1)$$

con

$$H_0 = \frac{3}{2}R_{abcd}R^{abcd} + R_{ab}R^{ab} + \frac{1}{2}R^2$$

$$H_2 = 2\left[R_{pqra}\left(R^{pqrb} + R^{rqpb}\right) - R^{pq}R^b_{paq} + R^p_aR^b_p + \frac{1}{2}RR^b_a\right]\tau^a\tau_b, \qquad (2)$$

$$H_4 = \left[R^{paqb}R_{pcqd} + \frac{1}{2}R^{ab}R_{cd}\right]\tau_a\tau_b\tau^c\tau^d$$

y τ_r es cualquier vector tipo-tiempo unitario, entonces [1,2]:

$$H = 0 \text{ en un evento } P \text{ de } R_4 \Rightarrow R_{ijkm}(P) = 0. \qquad (3)$$

En 2 participan el tensor de Ricci $R_{ab} = R^c_{abc}$ y la curvatura escalar $R = R^a_a$. Es claro que $H = 0$ en todo punto del espacio-tiempo corresponde a la geometría de Minkowski. Se utiliza la convención de Dedekind - Einstein [3,4] de suma sobre índices repetidos.

El teorema 3 debido a Synge [1] es útil en relatividad genral. En efecto, aquí se utiliza para probar que ningún R_4 vacío admite vectores temporales constantes.

⋆ hernando.caicedo@uniautonoma.edu.co
⋆⋆jlopezb@ipn.mx

2. Espacio-Tiempo Vacío

En [5] se muestra que, en una geometría dada, es importante estudiar la existencia de vectores constantes:

$$\tau_{r;c} = 0, \tag{4}$$

que en unión de la no-conmutatividad de la derivada covariante implica:

$$R^{abcd}\tau_d = 0. \tag{5}$$

Ahora se probará que, para el caso $R_{ab} = 0$, el invariante H y 5 establecen que no existen vectores tipo-tiempo constantes en ningún 4-espacio vacío, lo cual tiene unmediata aplicación a la métricas de Taub, Schwarzschlid, C, Siklos y Kerr, entre otras.

Sin perdida de generalidad puede emplearse un τ_r unitario, es decir, $\tau a \tau_a = -1$, entonces de 1, 2 y 5 se obtiene que:

$$H = \frac{3}{40} R_{abcd} R^{abcd}, \tag{6}$$

pero en [5] se demostró, que mediante un resultados de Horndeski [6], que vale cero el escalr de Lanczos [7,8] $R_{ijkm}R^{ijkm}$ para un espacio-tiempo vacío en presencia de un vector constante no-nulo, por lo tanto, 5 implica $H = 0$ y entonces 3 da un $R4$ plano. En otras palabras, ningún 4-espacio vacío con curvatura acepta vetores tipo-tiempo constantes.

3. Conclusiones

Es muy notable el papel que desempeña el invariante de Synge como un detector de curvatura, ya que su anulación en un evento hace cero a todas las componentes del tensor de Riemann en tal evento, lo cual permite dar una sencilla demostración de la no-existencia de vectores temporales constantes en 4-espacios vacíos.

Referencias

[1] J. L. Synge, An invariant gravitational density, Proc. Roy. Irish Acad. A58, 29, 1957.

[2] J. López-Bonilla, G. Ovando and J. Rivera, On some invariants of Synge, J. Bangladesh Acad. Sci. 24, No. 2, 179, 2000.

[3] M. A. Sinaceur, Dedekind et le programme de Riemann, Rev. Hist. Sci. 43, 221, 1990.

[4] D. Laugwitz, Bernhard Riemann 1826-1866. Turning points in the conception of mathematics, Birkhäuser, Boston, USA 2008.

[5] V. Gaftoi, J. López-Bonilla, D. Navarrete and G. Ovando, Sobre unos invariantes de Lanczos, Rev. Mex. Fís. 36, No. 4, 503, 1990.

[6] G. W. Horndeski, Dimensionally dependent divergences, Proc. Camb. Phil. Soc. 72, 77, 1972.

[7] C. Lanczos, A remarkable property of the Riemann-Christoffel tensor in four dimensions, Ann. of Math. 39, 842, 1938.

[8] J. López-Bonilla, J. Yaljá Montiel P. and E. Ramírez G., Lanczos invariant as an important element in Riemannian 4-spaces, Apeiron 13, No. 2, 196, 2006.