Journal de Ciencia e Ingeniería

Journal de Ciencia e Ingeniería, Vol. 6, No. 1, Agosto de 2014, pp. 11-13
Investigación - Fisicomatemáticas

Rotaciones en el espacio de Minkowski

Rotations in Minkowski space

I. Guerrero-Moreno, G. Leija-Hernández, J. López-Bonilla [a] ⋆

[a] *ESIME-Zacatenco, IPN, Edif. 5, 1^{er}. Piso, Col. Lindavista CP 07738, México DF*

Recibido: 15/5/2014; revisado: 23/6/2014; aceptado: 30/7/2014

I. Guerrero-Moreno, G. Leija-Hernández, J. López-Bonilla: Rotaciones en el espacio de Minkowski. Jou.Cie.Ing. **6** (1): 13-15, 2014. ISSN 2145-2628.

Resumen

Con la relación de Olinde Rodrigues-Cartan se obtiene una expresión para la matriz de Lorentz, que a su vez se cambia a una forma más adaptada al formalismo de Newman-Penrose, lo cual permite realizar rotaciones de la tétrada nula de NP.

***Palabras Clave*:** Matriz de Lorentz, Tétrada nula de Newman-Penrose.

Abstract

With the relation of Olinde Rodrigues-Cartan is obtained an expression for the Lorentz matrix, and it is transformed to a better form for the Newman-Penrose formalism, thus it is possible to realize rotations of the null tetrad of NP.

***Keywords*:** Lorentz matrix, Null tetrad of Newman-Penrose.

1. Introducción

Aquí se emplea la notación y convenciones de [1]. La expresión de Olinde Rodrigues [2]-Cartan [3]:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^0 + \tilde{x}^3 & \tilde{x}^1 - i\tilde{x}^2 \\ \tilde{x}^1 + i\tilde{x}^2 & \tilde{x}^0 - \tilde{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} & \bar{\delta} \end{pmatrix} \tag{1}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son números complejos arbitrarios excepto por la condición $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, deja 6 grados de libertad en la matriz de Lorentz $L = (L^{\upsilon}_{\mu})$ que relaciona a los marcos de referencia: $(x^{\mu}) = (ct, x, y, z)$ y $(\tilde{x}^{\nu})$:

$$\tilde{x}^{\nu} = L^{\nu}_{\mu} x^{\mu} \tag{2}$$

Con (1) y (2) se obtiene que [4–8]:

⋆ jlopezb@ipn.mx

$$
\begin{aligned}
L_0^0 &= \tfrac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}+\gamma\bar{\gamma}+\delta\bar{\delta}), & L_0^1 &= \tfrac{1}{2}(\bar{\alpha}\gamma+\bar{\beta}\delta)+cc, & L_0^2 &= \tfrac{i}{2}(\alpha\bar{\gamma}+\bar{\beta}\delta)+cc,\\
L_1^0 &= \tfrac{1}{2}(\bar{\alpha}\beta+\bar{\gamma}\delta)+cc, & L_1^1 &= \tfrac{1}{2}(\bar{\alpha}\delta+\beta\bar{\gamma})+cc, & L_1^2 &= \tfrac{i}{2}(\alpha\bar{\delta}+\beta\bar{\gamma})+cc,\\
L_2^0 &= \tfrac{i}{2}(\bar{\alpha}\beta+\bar{\gamma}\delta)+cc, & L_2^1 &= \tfrac{i}{2}(\bar{\alpha}\delta+\beta\bar{\gamma})+cc, & L_2^2 &= \tfrac{1}{2}(\bar{\alpha}\delta+\bar{\beta}\gamma)+cc,\\
L_3^0 &= \tfrac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}+\gamma\bar{\gamma}-\delta\bar{\delta}), & L_3^1 &= \tfrac{1}{2}(\bar{\alpha}\gamma+\bar{\beta}\delta)+cc, & L_3^2 &= \tfrac{i}{2}(\alpha\bar{\gamma}+\bar{\beta}\delta)+cc,\\
L_0^3 &= \tfrac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}-\gamma\bar{\gamma}-\delta\bar{\delta}), & L_1^3 &= \tfrac{1}{2}(\bar{\alpha}\beta+\bar{\gamma}\delta)+cc, & L_2^3 &= \tfrac{i}{2}(\bar{\alpha}\beta+\bar{\gamma}\delta)+cc,\\
L_3^3 &= \tfrac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha}-\beta\bar{\beta}-\gamma\bar{\gamma}+\delta\bar{\delta}), & & \alpha\delta-\beta\gamma=1,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

donde cc significa el complejo conjugado de todos los términos previos.

En la Sec. 2, en L se eliminan $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ a favor de otras cantidades mejor adaptadas al estudio de tétradas nulas tipo Newman-Penrose (NP) [9–11], así (3) se reduce a las expresiones deducidas en [12–14].

2. Rotaciones en relatividad especial

Si en (3) se realizan las sustituciones $\left[\tau=\frac{1}{\sqrt{1-\Gamma\Omega}}\right]$:

$$
\alpha=-\tau\exp\left(-\frac{A+iB}{2}\right)\quad \beta=\tau\exp\left(-\frac{A+iB}{2}\right)\bar{\Gamma},\quad \gamma=\tau\exp\left(\frac{A+iB}{2}\right)\bar{\Omega},\quad \delta=-\tau\exp\left(\frac{A+iB}{2}\right) \tag{4}
$$

donde A,B son reales y Γ,Ω son complejos con $\Gamma\Omega\neq 1$, (es simple comprobar que (4) respeta el requisito $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ resulta de las relaciones de [12–14] $\left[Q=\frac{1}{2|1-\Gamma\Omega|}\right]$:

$$
\begin{aligned}
L_0^0 &= Q\left[e^{A}\left(1+\Omega\bar{\Omega}\right)+e^{-A}\left(1+\Gamma\bar{\Gamma}\right)\right], & L_0^1 &= -Q\left[e^{iB}\left(\Gamma+\bar{\Omega}\right)+cc\right], & L_0^2 &= -iQ\left[e^{-iB}\left(\Omega+\bar{\Gamma}\right)-cc\right],\\
L_1^0 &= -Q\left[e^{A}\left(\Omega+\bar{\Omega}\right)+e^{-A}\left(\Gamma+\bar{\Gamma}\right)\right], & L_1^1 &= Q\left[e^{iB}\left(1+\bar{\Omega}\Gamma\right)+cc\right], & L_1^2 &= -iQ\left[e^{-iB}\left(1+\Omega\bar{\Gamma}\right)-cc\right],\\
L_2^0 &= iQ\left[e^{A}\left(\bar{\Omega}-\Omega\right)+e^{-A}\left(\Gamma-\bar{\Gamma}\right)\right], & L_2^1 &= iQ\left[e^{iB}\left(1-\bar{\Omega}\Gamma\right)-cc\right], & L_2^2 &= -Q\left[e^{-iB}\left(\Omega\bar{\Gamma}-1\right)+cc\right],\\
L_3^0 &= Q\left[e^{A}\left(\Omega\bar{\Omega}-1\right)+e^{-A}\left(1-\Gamma\bar{\Gamma}\right)\right], & L_3^1 &= Q\left[e^{iB}\left(\Gamma-\bar{\Omega}\right)+cc\right], & L_3^2 &= iQ\left[e^{-iB}\left(\bar{\Gamma}-\Omega\right)-cc\right],\\
L_0^3 &= Q\left[-e^{A}\left(1+\Omega\bar{\Omega}\right)+e^{-A}\left(1+\Gamma\bar{\Gamma}\right)\right], & L_1^3 &= Q\left[e^{A}\left(\Omega-\bar{\Omega}\right)-e^{-A}\left(\Gamma-\bar{\Gamma}\right)\right],\\
L_3^3 &= iQ\left[e^{A}\left(\Omega-\bar{\Omega}\right)+e^{-A}\left(\Gamma-\bar{\Gamma}\right)\right], & L_3^3 &= Q\left[e^{A}\left(1-\Omega\bar{\Omega}\right)-e^{-A}\left(1-\Gamma\bar{\Gamma}\right)\right],
\end{aligned}
\tag{5}
$$

En [15]se mostró que una tétrada real ortonormal experimenta una rotación en el espacio de Minkowski si sobre ella actúa la matriz de Lorentz:

$$
\tilde{e}^{(a)}_{\mu}=L^{a}_{b}e^{(b)}\mu, \tag{6}
$$

tal que $e^{(0)}_{\mu}=e_{(0)}\mu$ y $e^{(j)}_{v}=-e_{(j)v},\ j=1,2,3$, esto debido al tensor métrico $(1,-1,-1,-1)$. Con (5), (6) y las definiciones [9–11]:

$$
l^{\nu}=\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{\nu}_{(0)}+e^{\nu}_{(3)}),\qquad n^{\nu}=\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{\nu}_{(0)}-e^{\nu}_{(3)}),\qquad m^{\nu}=\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{\nu}_{(1)}-ie^{\nu}_{(2)}),\qquad \bar{m}^{\nu}=\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{\nu}_{(1)}+ie^{\nu}_{(2)}), \tag{7}
$$

puede calcularse cómo rota esta tétrada nula de NP $[C=\frac{1}{|1-\Gamma\Omega|}]$

$$
\begin{aligned}
\tilde{l}^{\mu} &= Ce^{A}(l^{\mu}+\Omega\bar{\Omega}n^{\mu}+\bar{\Omega}m^{\mu}+\bar{m}^{\mu}\Omega), & \tilde{n}^{\mu} &= Ce^{-A}(n^{\mu}+\Gamma\bar{\Gamma}l^{\mu}+\Gamma m^{\mu}+\bar{\Gamma}\bar{m}^{\mu})\\
\tilde{m}^{\mu} &= Ce^{-iB}(\bar{\Gamma}l^{\mu}+\Omega n^{\mu}+m^{\mu}+\bar{\Gamma}\Omega\bar{m}^{\mu}), & \tilde{\bar{m}}^{\mu} &= Ce^{iB}(\Gamma l^{\mu}+\bar{\Omega}n^{\mu}+\bar{m}^{\mu}+\Gamma\bar{\Omega}\bar{m}^{\mu}),
\end{aligned}
\tag{8}
$$

expresiones bastante útiles en diversas aplicaciones en relatividad [9–11,16,17]. En (8) es sencillo comprobar que $\tilde{l}^{\mu}\tilde{n}_{\mu}=-\tilde{m}^{\mu}\tilde{\bar{m}}=1$.

Así, en la literatura se emplean tres tipos de rotaciones:

CLASE I: $\Omega = 0$. No se altera la dirección de l^μ.

$$\tilde{l}^\mu = e^A l^\mu, \tilde{n}^\upsilon = e^{-A}\left(n^\mu + \Gamma\bar{\Gamma}l^\mu + \Gamma m^\mu + \bar{\Gamma}\bar{m}^\mu\right), \tilde{m}^\mu = e^{-iB}\left(\bar{\Gamma}l^\mu + m^\mu\right), \tilde{\bar{m}}^\mu = e^{iB}\left(\Gamma l^\mu + \bar{m}^\mu\right). \quad (9)$$

CLASE II: $\Gamma = 0$. n^ν mantiene su dirección.

$$\tilde{l}^\nu = e^A\left(l^\nu + \Omega\bar{\Omega}n^\nu + \bar{\Omega}m^\nu + \Omega\bar{m}^\nu\right), \tilde{n}^\upsilon = e^{-A}n^\nu, \tilde{m}^\nu = e^{-iB}\left(\Omega n^\nu + m^\nu\right), \tilde{\bar{m}}^\nu = e^{iB}\left(\bar{\Omega}n^\nu + \bar{m}^\nu\right). \quad (10)$$

CLASE III: $\Omega = \Gamma = 0$.

$$\tilde{l}^\mu = e^A l^\mu, \qquad \tilde{n}^\mu = e^{-A}n^\nu, \qquad \tilde{m}^\mu = e^{-iB}m^\mu, \qquad \tilde{\bar{m}}^\mu = e^{iB}\bar{m}^\mu, \quad (11)$$

que permiten determinar cómo cambian, por ejemplo, los coeficientes de espín, las componentes NP de los tensores de Weyl, Ricci, Lanczos, etc., ante una rotación de la tétrada nula. Esto es importante porque usualmente se efectúan rotaciones para alinear a l^μ y/o n^μ con las direcciones principales de Cartan [18]-Debever [19]-Penrose [20] del tensor conformal o del tensor electromagnético de Faraday [21], lo cual aporta gran simplificación en diversos cálculos relativistas.

3. Conclusiones

Se mostró que con la matriz de Lorentz se puede realizar una transformación de coordenadas vía (2), o mediante (6) rotar una tétrada real ortonormal y esto último llevó a (8) en donde los grados de libertad A, B, Ω, Γ otorgan amplia flexibilidad para girar a conveniencia la tétrada nula de NP.

Referencias

[1] A. Hernández G., R. López-Vázquez, J. Rivera R., and J. López-Bonilla. Tensor de Faraday y espinor de Maxwell. *Jou.Cie.Ing.*, 6(1):16–, 2014.

[2] B. Olinde Rodrigues. Des lois géométriques qui r¨gissent les déplacements dâun systéme solid. *Journal de Math*, 5:380–440, 1840.

[3] E. Cartan. Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane. *Bull. Soc. Math. de France*, 41:53–96, 1913.

[4] J. Rummer. *Spinorial analysis*. Moscow, 1936.

[5] J. Aharoni. *The special theory of relativity*. Clarendon Press, Oxford, 1959.

[6] J. L. Synge. *Relativity: the special theory*. North-Holland, Amsterdam, 1965.

[7] J. López-Bonilla, J. Morales, and G. Ovando. On the homogeneous Lorentz transformation. *Journal de Math*, 17:53–58, 2002.

[8] M. Acevedo M., J. López-Bonilla, and M. Sánchez M. Quaternions, Maxwell equations and Lorentz transformation. *Apeiron*, 12(4):371–384, 2005.

[9] E. Newman and R. Penrose. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *J. Math. Phys.*, 3(3):566–578, 1962.

[10] S. J. Campbell and J. Wainwright. Algebraic computing and the Newman-Penrose formalism in general relativity. *Gen. Rel. Grav.*, 8(12):987–1001, 1977.

[11] D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, and E. Herlt. *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge University Press, 1980.

[12] R. K. Sachs. Gravitational waves in general relativity vi: The outgoing radiation condition. *Proc. Roy. Soc. London A*, 264:) 309–337, 1961.

[13] P. J. Greenberg and J. P. Knauer. Stud. Appl. Math. *Journal de Math*, 53:165, 1974.

[14] M. Carmeli. Group theory and general relativity. 1977.

[15] R. Linares, J. López-Bonilla, and J. Quino. Tétradas reales y transformaciones de Lorentz. *Bol. Soc. Cub. Mat. Comp.*, 8(2):141–153, 2010.

[16] P. J. Greenberg. The algebra of the Riemann curvature tensor in general relativity: Preliminaries. *Stud. Appl. Math.*, 51:277, 1972.

[17] S. Chandrasekhar. *An introduction to the theory of the Kerr metric and its perturbations*. Cambridge University Press, 1979.

[18] E. Cartan. Sur les espaces conformes généralisés et l'univers optique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 174, 1922.

[19] R. Debever. Le rayonnement gravitationnel: Le tenseur de riemann en relativité générale. *Cah. de Phys.*, 168-169(1964):303, 2011.

[20] R. Penrose. A spinor approach to general relativity. *Ann. of Phys.*, 10:171–201, 1960.

[21] J. López-Bonilla, R. Meneses, and M. Turgut. Faraday tensor: its algebraic structure. *J. Vect. Rel.*, 4(3):23–32, 2009.