

---

# Cosmología cuántica de una 2-Brana en el espacio fase

## Quantum cosmology of a 2-brane in phase space

Julio César Vera-Hernández \*

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Zacatenco del IPN, Unidad Adolfo López Mateos,  
Edificio 4, 07738, México D.F., México

Recibido: 16/01/2015; revisado: 3/4/2015; aceptado: 13/07/2015

---

**J. C. Vera-Hernández:** Cosmología cuántica de una 2-Brana en el espacio fase. *Jou.Cie.Ing.* 7 (1): 43-53, 2015. ISSN 2145-2628.

### Resumen

Se discute la dinámica en el espacio fase de una membrana relativista 2-dimensional con simetría esférica mediante el uso de la función de Wigner. Mediante el uso de las condiciones de frontera de Hartle-Hawking, Linde y Vilenkin se discuten las funciones de onda así como sus funciones de Wigner, explorando su comportamiento asintótico así como una solución numérica. Además, se discute la posible relación con las funciones Q de Husimi y una posible extensión usando la geometría no conmutativa.

**Palabras Clave:** Cosmología cuántica, métodos de cuantización, cuantización por deformación, espacio fase.

### Abstract

Dynamics of a 2-dimensional relativistic spherically symmetric membrane is discussed by using the Wigner function. By using Hartle-Hawking, Linde and Vilenkin boundary conditions both wave and Wigner functions are discussed, exploring its asymptotic behavior as well as a numerical solution. Finally, possible relationship between the Q Husimi functions and an extension using noncommutative geometry are discussed.

**Keywords:** Quantum cosmology, brane dynamics, quantum phase space, noncommutative geometry.

---

## 1. Introducción

Los objetos relativistas extendidos han sido empleados por muchos años en modelos de diversos sistemas físicos [3]. Uno de los primeros ejemplos es el modelo del electrón extendido de Dirac el cual fue propuesto con el objetivo de eliminar la divergencia de la energía electromagnética. Otro ejemplo puede encontrarse en la física de partículas elementales donde la estructura de la cuerda relativista ha sido usada en modelos de resonancia dual. De hecho, la extensión supersimétrica del modelo de cuerdas es considerado como uno de los candidatos más fuertes para unificar todas las interac-

ciones fundamentales, incluyendo a la gravedad [4, 5].

En cosmología pueden encontrarse también muchos tipos de objetos extendidos. Por ejemplo, durante las transiciones de fase en los primeros instantes del universo aparecieron algunas configuraciones estables de campos con topología no trivial tales como las paredes de dominio, las cuerdas cósmicas y los monopolos. Estos objetos extendidos pudieron tener consecuencias cosmológicas importantes, en particular, pudieron incluso producir fluctuaciones en la densidad que afectan la formación de galaxias y la estructura a gran escala del universo. Las cuerdas cósmicas y las paredes de domi-

---

\* [jevera@ipn.mx](mailto:jevera@ipn.mx)

nio pueden llegar a ser superconductoras si la invarianza de norma se rompe en el interior del defecto. Aparte, existen también configuraciones estacionarias de cuerdas superconductoras llamadas *vortones* los cuales han sido propuestos como fuentes de rayos cósmicos ultraenergéticos y materia oscura [6,7]. Sin embargo, estos objetos superconductores no son estables debido a efectos cuánticos produciendo un decaimiento de corriente [8,9]. En el universo temprano, durante la ruptura espontánea de la simetría, las burbujas de vacío verdadero inmersas en un falso vacío metaestable pueden ser producidas a través del proceso de tunelamiento cuántico [3].

Recientemente, algunos modelos sugieren que nuestro universo puede ser visto como una superficie 4-dimensional encajada en un espacio de cinco o más dimensiones [10,11]. Estos modelos pueden ser usados para describir propiedades de la materia y energía oscura así como también los mecanismos cuánticos de la creación del universo [12–16]. Los ejemplos previos muestran la importancia de comprender en detalle los comportamientos tanto clásicos como cuánticos de este tipo de objetos. El tratamiento empleado para obtener la cuantización de estos sistemas es usualmente realizada mediante los formalismos de cuantización canónica o por la cuantización por integrales de trayectoria [17] donde se utilizan las representaciones de coordenadas o momentos. Sin embargo, existen algunas propiedades cuánticas que no son apreciadas en estas descripciones y que necesitan herramientas adicionales para extraer la información física cuántica relevante.

El marco del espacio fase es un escenario muy útil en el cual las propiedades de la física cuántica pueden ser analizadas. Ofrece información adicional a la construcción cuántica estándar, la cual es realizada en sólo una representación (coordenadas o momentos). El espacio fase nos permite una imagen más completa de los fenómenos cuánticos puesto que las relaciones entre las coordenadas y los momentos pueden ser apreciadas al mismo tiempo. Más aun, este escenario es una extensión apropiada del formalismo de Hamilton a la descripción cuántica de la naturaleza. Este tipo de construcción nos permite apreciar propiedades que no se aprecian en la descripción estándar de la mecánica cuántica. Una revisión de completa de esta construcción y sus aplicaciones se presenta en [18].

Bajo esta aproximación la función de Wigner es el objeto más importante de la teoría. Esta función contiene toda la información cuántica del sistema; en particular, el estudio de las propiedades semiclásicas y el

análisis del límite clásico es más claro en términos de ésta. La descripción de la función de Wigner ha sido usada en óptica cuántica, física de partículas y física nuclear, materia condensada, física estadística, etc. Más aun, algunos métodos han sido propuestos para medir la función de Wigner experimentalmente [19–21]. La descripción del espacio fase ha sido empleada ya para tratar algunos objetos extendidos relativistas, como lo son las cuerdas bosónicas [22]. Hasta donde se sabe no existen estudios de las propiedades cuánticas de otros objetos extendidos o en particular de la 2-brana en el espacio fase.

El propósito de este artículo es introducir el uso de la función de Wigner en la descripción de las membranas bidimensionales relativistas y analizar el comportamiento cuántico de la 2-brana esféricamente simétrica en el espacio fase. Con el fin de evitar las complicaciones de considerar todos los grados de libertad y con el objetivo de presentar una configuración simple se enfoca el estudio en la brana esférica. Incluso cuando este es un modelo que fue pensado como una simplificación posee implicaciones físicas relevantes en la evolución del universo temprano a través de la nucleación de burbujas de vacío verdadero [23,24].

La función de Wigner es una descripción que admite una interpretación más clara acerca del concepto de estado cuántico, relacionando la contraparte clásica de estado clásico como punto en el espacio fase [?]. Los observables resultan ser funciones suaves sobre el espacio fase y su construcción se obtiene de la evaluación de las funciones en el espacio fase. Por otra parte, su construcción también es realizable mediante técnicas desarrolladas en el campo de la óptica [1], en donde se pueden modelar sistemas complejos mediante arreglos experimentales.

El artículo está organizado como sigue. En la sección 2 se presenta una breve descripción de las propiedades de la función de Wigner y se calcula la función de Wigner para dos tipos de 2-branas bosónicas esféricamente simétricas. Primero se considera la burbuja de vacío verdadero donde su función de onda puede ser calculada exactamente en términos de la función biconfluente de Heun. Sin embargo, esta función no es recomendable para trabajar con ella; por esta razón se analiza las propiedades de la función de onda por tres métodos distintos: el método WKB, la solución a la ecuación de Schrödinger para valores muy grandes del radio de la burbuja y finalmente el comportamiento asintótico. Después, la función de Wigner se obtiene numéricamente a través de su representación integral para tres diferen-

tes condiciones de frontera (Hartle-Hawking, Linde y Vilenkin) inspiradas en la cosmología cuántica. Finalmente, en la sección 3 se da la conclusión.

## 2. La función de Wigner de la 2-brana bosónica

Existen distintos métodos para obtener la cuantización de un sistema clásico, partiendo con el bien conocido proceso de cuantización canónica desarrollado por Heisenberg, Schrödinger, Dirac y muchos otros, continuando con la formulación de las integrales de trayectoria establecida por Feynman. Adicional a esto, muchas técnicas se han construido en el espacio fase como el formalismo de la cuantización geométrica y la cuantización por deformación que fueron introducidas para tratar con algunos problemas de los métodos previos [25, 26].

El tratamiento cuántico de los sistemas físicos en el espacio fase comienza con el objetivo de establecer una conexión con la descripción clásica [18]. El objeto fundamental en este marco es la función de Wigner (una función de distribución de cuasi-probabilidad) la cual tiene aplicaciones importantes en óptica y procesamiento de señales [27].

Para un sistema cuántico con un grado de libertad descrito por el operador de densidad

$$\hat{\rho} = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|, \quad (1)$$

donde las cantidades  $p_j$  son no negativas y su suma es igual a uno, la función de Wigner puede ser construida como su transformada de Fourier en la siguiente forma

$$\rho_w(x, p) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{2\pi\hbar} \left\langle x + \frac{y}{2} \left| \hat{\rho} \left| x - \frac{y}{2} \right. \right\rangle e^{-ipy/\hbar}. \quad (2)$$

Por simplicidad se considera en este artículo sólo un espacio fase 2-dimensional  $(x, p) \in \mathbb{R}^2$ ; sin embargo, la siguiente construcción puede ser extendida directamente a espacios fase planos de dimensiones mayores.

En particular, para un estado puro  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$  la función de Wigner puede ser calculada en términos de la función de onda  $\psi(x)$  como

$$\rho_w(x, p) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{2\pi\hbar} e^{-i\frac{\xi p}{\hbar}} \psi^* \left( x - \frac{\xi}{2} \right) \psi \left( x + \frac{\xi}{2} \right). \quad (3)$$

Esta función satisface las siguientes propiedades:

1.  $\rho_w(x, p) = \rho_w(x, p)^*$ , es una función real,

2.  $\int_{\mathbb{R}^2} dx dp \rho_w(x, p) = 1$ , está normalizada,
3.  $\int_{\mathbb{R}} dp \rho_w(x, p) = \alpha(x)$ , define una densidad de probabilidad espacial positiva,
4.  $\int_{\mathbb{R}} dx \rho_w(x, p) = \beta(p)$ , define una densidad de probabilidad de momento positiva.

Sin embargo, la función de Wigner admite valores negativos, por lo que es considerada una distribución de cuasi-probabilidad. Esta característica ha estimulado un estudio matemático para tratar con probabilidades negativas [28, 29] donde su interpretación física ha sido analizada a través de los años y algunos autores la conciben como una consecuencia de los efectos no clásicos del espacio fase [30, 31]. Recientemente algunos avances tratan a la función de Wigner en analogía con la construcción de Koopman-von Neumann que ha sido desarrollada en [32].

La función de Wigner contiene la información cuántica del sistema y, en principio, nos permite una descripción más clara de las propiedades semiclásicas y el análisis del límite clásico. Sin embargo, su uso en el estudio de los objetos extendidos no ha sido explorado ampliamente y el objetivo es hacer uso de las ventajas que ofrece y completar la descripción cuántica dada por otros métodos. En particular, la 2-brana aparece en contextos físicos diferentes; por ejemplo, como burbujas de vacío verdadero embebidas en un falso vacío metaestable [15].

### 2.1. La burbuja de vacío verdadero

En el universo temprano ocurrieron transiciones de fase donde burbujas esféricas de la nueva fase emergieron espontáneamente, expandiéndose cercanas a la velocidad de la luz. La energía producida cuando la fase anterior se transformó en la nueva fase estaba localizada en la vecindad de la pared de la burbuja. El fin de la transición de fase es alcanzado cuando las burbujas se fusionan y la energía de las paredes es termalizada, produciendo que la nueva fase cubra el universo completo. La evolución de las burbujas y su fusión en un universo en expansión ha sido tratado por algunos autores [23, 24].

Más aun, dominios de pared esféricos pueden ser continuamente producidos durante la inflación por tunelamiento mecánico-cuántico [33]. De esta manera estos defectos topológicos pudieron tener densidades no despreciables después de la inflación. Por otro lado, la

configuración de pared esférica nos permite reducir los grados de libertad y eliminar muchos problemas presentes en el caso general. En este sistema el número de grados de libertad es sólo uno, y corresponde al radio  $R$  de la burbuja.

El modelo es simplificado tomando en cuenta los siguientes puntos:

1. Se considera un espacio-tiempo de Minkowski tal que el efecto gravitacional de la burbuja de vacío verdadero es despreciable.
2. Como una primera aproximación se considera al radio de la burbuja mucho más grande que su espesor; de esta manera la pared se puede aproximar como una hoja infinitamente delgada.
3. Se supone que la acción de tunelamiento es grande por lo que se puede emplear la aproximación semiclásica de WKB.

Tomemos una superficie 2-dimensional  $\Sigma$  que evoluciona en un espacio-tiempo de fondo de Minkowski 4-dimensional con métrica  $\eta_{\mu\nu}$ , descrita en términos del encaje  $x^\mu = X^\mu(\xi^a)$  donde  $\xi^a$  son coordenadas locales para el volumen de mundo,  $m$ , barrido por la superficie  $\Sigma$  ( $a, b = 0, 1, 2$ ).  $x^\mu$  denota a las coordenadas locales para el espacio-tiempo ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ) y  $X^\mu$  son las funciones de encaje para  $m$ .

La acción efectiva que caracteriza a la dinámica de la burbuja está dada por

$$S = S_w + S_b = - \int d^3\xi \sigma \sqrt{-g} + \int dt d^3 X \varepsilon, \quad (4)$$

donde  $\sigma$  denota la tensión de la burbuja,  $\varepsilon$  es la diferencia de energía entre el falso y el verdadero vacío,  $g$  denota el determinante de la métrica inducida por el volumen de mundo  $g_{ab} = \eta_{\mu\nu} e^\mu_a e^\nu_b$  y  $e^\mu_a = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a}$  son los vectores tangentes al volumen de mundo.

Las definiciones dadas anteriormente dan una descripción especializada de una membrana esférica  $\Sigma$ . A partir de este momento, consideraremos un espacio-tiempo de fondo Minkowski descrito por  $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$ . La hoja de mundo de la burbuja puede ser descrita por las funciones de encaje  $X^\mu = (t(\tau), R(\tau), \theta, \phi)$ .

Usando los vectores tangentes,  $e^\mu_\tau = \partial x^\mu / \partial \tau = (\dot{t}, \dot{R}, 0, 0)$ ,  $e^\mu_\theta = \partial x^\mu / \partial \theta = (0, 0, 1, 0)$  y  $e^\mu_\phi = \partial x^\mu / \partial \phi = (0, 0, 0, 1)$  la métrica inducida sobre el volumen de mundo puede leerse del elemento de línea  $ds^2 = g_{ab} d\xi^a d\xi^b = -N^2 d\tau^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$  donde  $N = \sqrt{\dot{t}^2 - \dot{R}^2}$  y los puntos denotan la derivada

con respecto al parámetro  $\tau$ . Es importante mencionar que  $N$  corresponde a la función de lapso en la aproximación hamiltoniana de ADM para membranas [34,35]. Empleando esta expresión para la métrica inducida y la norma de Minkowski  $\dot{t} = 1$ , la lagrangiana puede escribirse como

$$L = -4\pi\sigma R^2 (1 - \dot{R}^2)^{1/2} + \frac{4\pi}{3}\varepsilon R^3. \quad (5)$$

El momento conjugado asociado a la variable  $R$  está dado por

$$p_R = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = 4\pi\sigma R^2 \dot{R} (1 - \dot{R}^2)^{-1/2}, \quad (6)$$

y así el hamiltoniano asociado es

$$H = p_R \dot{R} - L = \left[ p_R^2 + (4\pi\sigma R^2)^2 \right]^{1/2} - \frac{4\pi}{3}\varepsilon R^3 = 0, \quad (7)$$

puesto que este hamiltoniano nulo describe un proceso de nucleación en donde la energía se conserva. Debido al hecho de que el hamiltoniano (7) posee una raíz cuadrada es conveniente emplear como nuevo hamiltoniano  $H'$  una expresión que contiene momento cuadrático como se hace usualmente [15].

Definiendo ahora las siguientes cantidades  $x := \frac{R}{R_0}$ ,  $p := R_0 p_R$ ,  $R_0 := \frac{3\sigma}{\varepsilon}$  y  $\mu := 2\pi\sigma R_0^3$ , escogemos

$$H' = p_R^2 + 4\mu^2 x^4 (1 - x^2) = 0. \quad (8)$$

La ecuación de Schrödinger correspondiente a este sistema es

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{4\mu^2}{\hbar^2} x^4 (1 - x^2) \psi(x) = 0. \quad (9)$$

donde  $\psi(x)$  denota a la función de onda.

El comportamiento del potencial cuántico se muestra en la figura 1 donde puede observarse una barrera que permite un proceso de tunelamiento.

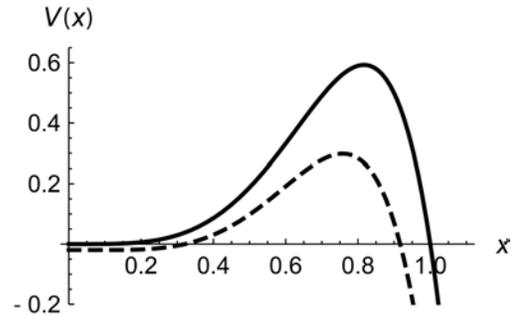


Fig. 1. La barrera de potencial para la nucleación de burbujas para  $\hbar = 1$  y para  $\mu = 1$  y  $\mu = 0.7$  (línea punteada).

En las siguientes subsecciones se presenta la solución analítica de esta ecuación y también tres formas distintas de soluciones aproximadas de la función de onda  $\psi$

con el objetivo de explorar su comportamiento y obtener una expresión analítica de la función de Wigner al menos en algunas regiones.

*Solución exacta y expansión asintótica*

La ecuación (9) tiene de hecho una solución exacta; sin embargo, es muy difícil de trabajar. A través del siguiente cambio de variable  $z := -\lambda x^2$ , donde  $\lambda^2 := \frac{i\mu}{\hbar^2}$ , la ecuación de Schrödinger puede escribirse como

$$z \frac{d^2}{dz^2} \psi(z) + \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \psi(z) + z^2(\lambda - z)\psi(z) = 0. \quad (10)$$

De acuerdo con [36], la solución de la ecuación (10) puede ser expresada en la siguiente manera

$$\psi(z) = \exp \left[ -\frac{1}{2} z(z - \lambda) \right] \varphi(z). \quad (11)$$

Sustituyendo esta expresión para  $\psi(z)$  en la ecuación (10), obtenemos la *ecuación biconfluente de Heun* para la función  $\varphi(z)$  dada por

$$z \frac{d^2}{dz^2} \varphi(z) + \left( \frac{1}{2} + \lambda z - 2z^2 \right) \frac{d}{dz} \varphi(z) + \left[ \left( \frac{\lambda^2}{4} - \frac{3}{2} \right) z + \frac{\lambda}{4} \right] \varphi(z) = 0. \quad (12)$$

Las soluciones generales de la ecuación biconfluente de Heun

$$z \frac{d^2}{dz^2} \varphi(z) + (1 + a - bz - 2z^2) \frac{d}{dz} \varphi(z) + \left\{ (g - a - 2)z - \frac{1}{2} [d + (1 + a)b] \right\} \varphi(z) = 0, \quad (13)$$

son llamadas las *funciones biconfluente de Heun*  $H_B^{(1)}(a, b, c, d|z)$  y  $H_B^{(2)}(a, b, c, d|z)$ , las cuales son linealmente independientes. Comparando las ecuaciones (12) y (13), encontramos que la solución general es

$$\varphi(z) = C_1 H_B^{(1)} \left( -\frac{1}{2}, -\lambda, \frac{\lambda^2}{4}, 0 \middle| z \right) + C_2 H_B^{(2)} \left( -\frac{1}{2}, -\lambda, \frac{\lambda^2}{4}, 0 \middle| z \right). \quad (14)$$

Estas funciones son generalizaciones de las funciones hipergeométricas y tienen un comportamiento oscilatorio amortiguado [37]. Sin embargo, no poseen una forma analítica cerrada y deben ser calculadas para cada conjunto de parámetros. Para soslayar estas dificultades es posible obtener la siguiente forma asintótica para  $z \gg 1$ :

$$\psi(z) \approx C_1 z^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\lambda^2}{4} - \frac{3}{2} \right) \exp \left[ -\frac{1}{2} z(z - \lambda) \right] + C_2 z^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\lambda^2}{4} + \frac{3}{2} \right). \quad (15)$$

Este resultado puede ser escrito en términos de  $x$ ,  $\mu$  and  $\hbar$  como:

$$\psi_H(x) \approx x^{-3/2} e^{-\frac{3\pi}{16}i} (C_1 e^{1\Delta} + C_2 e^{-i\Delta}), \quad (16)$$

para valores grandes de su argumento y para  $\Delta := \frac{1}{8} \ln \frac{\mu x^2}{\hbar}$ .

Se comparará este resultado con la aproximación semiclásica WKB y con la función de onda obtenida por la forma asintótica del potencial para valores grandes de  $x$  con el fin de implementar diferentes condiciones de frontera.

*Cálculo semiclásico WKB*

En la aproximación WKB la función de onda se expresa mediante la ecuación

$$\psi_{\pm}(x) = p(x)^{-1/2} \exp \left\{ \pm i \int_1^x d\xi p(\xi) \mp i \frac{\pi}{4} \right\}, \quad (17)$$

donde  $p(x) = [-V(x)]^{1/2}$  and  $\psi_{\pm}$  representa a ondas entrantes y salientes. En este caso  $V(x) = \frac{4\mu^2 x^4}{\hbar^2} (1 - x^2)$ , por lo que la forma WKB de la función de onda puede escribirse como

$$\psi_{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\mu x^2(x^2 - 1)^{1/2}}} \times \exp \left( \pm i \frac{\mu}{4\hbar} x(x^2 - 1)^{1/2} (2x^2 - 1) \mp \frac{i}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \mp \frac{i\pi}{4} \right), \quad (18)$$

y la solución general se expresa como

$$\psi_{\text{WKB}}(x) = D_1 \psi_+ + D_2 \psi_-. \quad (19)$$

Para valores grandes de  $x$  la forma asintótica de la función de onda es:

$$\psi_{\text{WKB}} \approx x^{-3/2} \left( D_1 \exp \left\{ i \frac{\mu}{\hbar} \left( 2x^4 - \ln x^{1/4} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} + D_2 \exp \left\{ -i \frac{\mu}{\hbar} \left( 2x^4 - \ln x^{1/4} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right) \quad (20)$$

Puede observarse que la función WKB presenta una amplitud amortiguada.

Por otro lado, el comportamiento de la función de onda bajo la barrera ( $x < 1$ ) puede expresarse como:

$$\psi_{\pm}(x) = |p(x)|^{-1/2} \quad (21)$$

y usando el siguiente resultado

$$\int_x^1 d\xi |p(\xi)| = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} \left[ x \sqrt{1 - x^2} (2x^2 - 1) + \arcsin x \right] \quad (22)$$

la función de onda está dada por

$$\psi_{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} (1 - x^2)^{-1/4} \exp \left\{ \pm \frac{\pi}{16} \mp \frac{1}{8} \left[ x\sqrt{1-x^2} (2x^2 - 1) \pm \arcsin x \right] \right\}. \quad (23)$$

Notemos que cerca del origen  $\psi_+$  es mayor que  $\psi_-$ .

#### Ecuación de Schrödinger asintótica

En el régimen  $x \gg 1$ , el término  $x^4$  en el potencial puede ser despreciado y la ecuación (9) se reduce a:

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + 4 \frac{\mu^2}{\hbar^2} x^6 \psi(x) = 0. \quad (24)$$

Se propone la siguiente forma para  $\varphi(x) := x^{-1/2} \psi(x)$ , donde  $\varphi$  es una función auxiliar la cual satisface la ecuación

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) + x \frac{d}{dx} \varphi(x) + \left( 4 \frac{\mu^2}{\hbar^2} x^8 \right) \varphi(x) = 0. \quad (25)$$

Usando el siguiente cambio de variable  $z := \frac{\mu}{2\hbar} x^4$  obtenemos la ecuación de Bessel

$$z^2 \frac{d^2}{dz^2} \varphi(z) + z \frac{d}{dz} \varphi(z) + \left( z^2 - \frac{1}{64} \right) \varphi(z) = 0. \quad (26)$$

De esta manera la solución de la ecuación (24) puede escribirse en la forma

$$\psi(x) = x^{1/2} \left( F_1 J_{\frac{1}{8}} \left( \frac{\mu}{2\hbar} x^4 \right) + F_2 J_{-\frac{1}{8}} \left( \frac{\mu}{2\hbar} x^4 \right) \right). \quad (27)$$

La expresión asintótica de las funciones de Bessel para valores grandes de  $x$  están dados por [38]:

$$J_{\pm\nu}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \left[ \cos \left( x \mp \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left( x \mp \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (28)$$

por lo tanto, la solución puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} \psi(x) &= x^{1/2} \left( F_1 J_{\frac{1}{8}} \left( \frac{\alpha^2}{2} x^4 \right) + F_2 J_{-\frac{1}{8}} \left( \frac{\alpha^2}{2} x^4 \right) \right) \\ &\approx x^{-3/2} \left\{ F_1 \left[ \cos \left( \frac{\mu}{2\hbar} x^4 - \frac{5\pi}{16} \right) - \sin \left( \frac{\mu}{2\hbar} x^4 - \frac{5\pi}{16} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. F_2 \left[ \cos \left( \frac{\mu}{2\hbar} x^4 - \frac{3\pi}{16} \right) - \sin \left( \frac{\mu}{2\hbar} x^4 - \frac{3\pi}{16} \right) \right] \right\}. \quad (29) \end{aligned}$$

Comparando las ecuaciones (16), (20) y (29), se puede observar que en el argumento de las funciones trigonométricas se tiene el mismo coeficiente en el término  $x^4$  de las funciones de onda. Sin embargo, la última

ecuación no depende de  $\ln x^{1/4}$ .

Estas aproximaciones serán empleadas en la siguiente subsección para calcular la función de onda para la condición de frontera de Hartle-Hawking.

#### Condiciones de frontera

Las ecuaciones de onda obtenidas en las subsecciones previas necesitan satisfacer condiciones de frontera específicas estipuladas por una configuración física particular. En esta parte, motivado por el problema de la condición de frontera presente en la cosmología cuántica [15], se estudiarán tres de las condiciones de frontera más empleadas: las propuestas por Hartle-Hawking, Vilenkin y Linde. El objetivo de este análisis es comentar las diferentes propiedades cuánticas de estas condiciones y su relación con su comportamiento clásico.

Las tres condiciones de frontera en cosmología cuántica son:

#### Hartle-Hawking

$$\psi_{\text{HH}}(x) = \begin{cases} \psi_-(x) & x < 1 \\ \psi_+(x) & x > 1 \end{cases}, \quad (30)$$

#### Vilenkin

$$\psi_{\text{V}}(x) = \begin{cases} \psi_+(x) - \frac{i}{2} \psi_-(x) & x < 1 \\ \psi_-(x) & x > 1 \end{cases}, \quad (31)$$

#### Linde

$$\psi_{\text{L}}(x) = \begin{cases} \psi_+(x) & x < 1 \\ \psi_+(x) - \psi_-(x) & x > 1 \end{cases}, \quad (32)$$

Existe un debate abierto acerca de cual es la condición de frontera correcta en la cosmología cuántica 4-dimensional [16], por lo que es interesante explorar estas condiciones de frontera para la nucleación de la burbuja desde la perspectiva del espacio fase. Con el objetivo de ilustrar las diferencias y con la esperanza de arrojar alguna luz a las propiedades adecuadas de estas condiciones se construyen las funciones de Wigner correspondientes

El primer paso en la construcción de la función de Wigner es obtener la función de onda. Debido a que el momento canónico es positivo (véase la ecuación (6)),

las funciones  $\psi_+$  y  $\psi_-$  son funciones de onda salientes y entrantes, respectivamente, las cuales son precisamente la situación opuesta que ocurre en cosmología cuántica [15].

Fuera de la barrera, la función de onda de tunelamiento de Vilenkin es una función de onda saliente  $\psi_v = \psi_+$ , mientras que las funciones de onda de Hartle-Hawking y de Linde corresponden a combinaciones de funciones de onda salientes y entrantes en la siguiente forma:  $\psi_{\text{HH}} = \psi_+ + \psi_-$  and  $\psi_L = \psi_+ - \psi_-$ .

Para la solución WKB es posible identificar, para  $x \gg 1$ , las siguientes funciones de onda: Hartle-Hawking:

$$\psi_{\text{HH}}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\mu}} x^{-3/2} \cos S, \quad (33)$$

Linde:

$$\psi_L(x) \approx i \frac{1}{\sqrt{2\mu}} x^{-3/2} \sin S, \quad (34)$$

Vilenkin:

$$\psi_v(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\mu}} x^{-3/2} e^{iS}, \quad (35)$$

where  $S := \frac{\mu}{\hbar} (2x^4 - \ln x^{1/4}) - \frac{\pi}{4}$  [15].

En la figura 2 se muestra las soluciones de la ecuación de Schrödinger para la condición de frontera de Hartle-Hawking usando el método de Runge-Kutta a cuarto orden, a través de la aproximación WKB, la expansión asintótica de las funciones biconfluentes de Heun y la forma asintótica de las funciones de Bessel. Para valores muy grandes de  $x$  las cuatro soluciones son similares. Para las propuestas de Linde y Vilenkin las soluciones son similares y por esta razón no se presentan en el artículo.

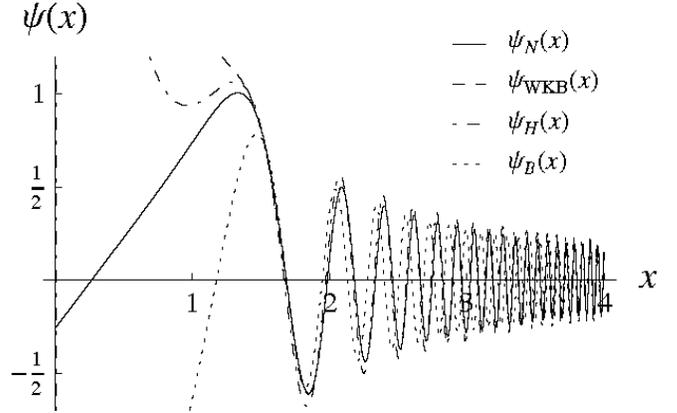


Fig. 2. Las soluciones de las funciones de onda por el proceso numérico  $\psi_N(x)$ , mediante la aproximación WKB  $\psi_{\text{WKB}}(x)$  y mediante las expansiones asintóticas de las funciones de Heun  $\psi_H(x)$  y de las funciones de Bessel  $\psi_B(x)$ . For  $\mu = \hbar = 1$  con las condiciones de frontera de Hartle-Hawking.

El siguiente paso es sustituir la expresión de la función de onda en la ecuación (3). El principal objetivo fue encontrar una expresión analítica para la función de Wigner usando las funciones de Heun (14); sin embargo, esto no fue posible. Con el propósito de encontrar expresiones analíticas de la función de Wigner, al menos en algunas regiones, usamos distintas formas asintóticas de la función de onda en (3) (de hecho, esta fue la razón de calcular la función de onda usando tres aproximaciones distintas). De todas maneras ninguna de ellas nos permite obtener estas funciones debido a las integrales involucradas. Finalmente, se implementó un cómputo numérico usando un código en Fortran para obtener la función de Wigner directamente empleando la función de onda de la ecuación, donde  $\psi(x) = 0$  for  $x < 0$ . Los resultados de las funciones de Wigner para cada condición de frontera se presentan en las figuras 3, 5 y 7, mientras que sus correspondientes mapeos de densidad se presentan en las figuras 4, 6 y 8.

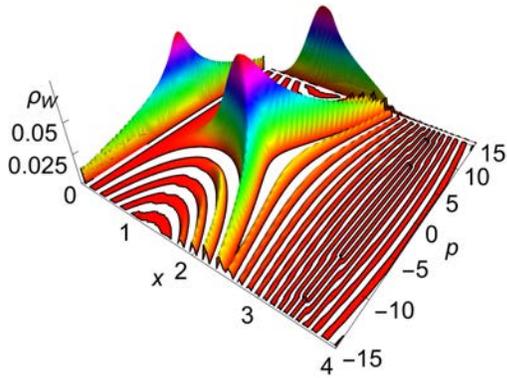


Fig. 3. La función de Wigner para Hartle-Hawking (para  $\mu = \hbar = 1$ ). La figura muestra muchas oscilaciones debidas a la interferencia entre las funciones de onda que expanden o contraen a las burbujas.

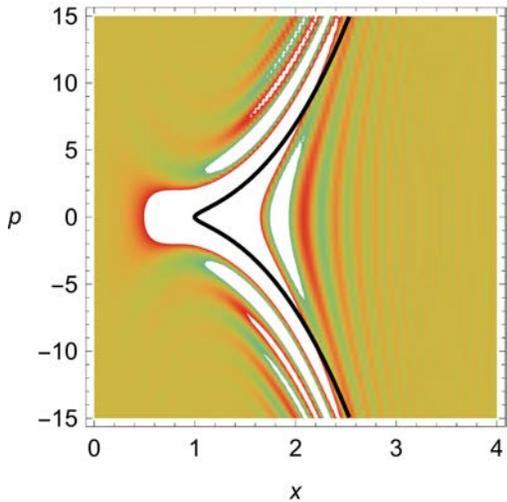


Fig. 4. Proyección de densidad de la función de Wigner para Hartle-Hawking Wigner. Se observa que la trayectoria clásica coincide para para valores pequeños de  $p$  pero difiere de los picos más altos cuando  $p$  es grande.

A continuación describiremos los resultados numéricos de la función de Wigner en todos los casos.

Para la función de Wigner de Hartle-Hawking notamos una forma simétrica oscilatoria alrededor del cero del momento (véase la figura 3), donde su pico más alto corresponde a la trayectoria clásica dada por

$$p^2 = 4\mu^2 x^4(x^2 - 1), \quad (36)$$

la cual está representada por una curva oscura en los gráficos de densidad (véanse las figuras 4, 6 y 8. Se puede observar que los picos de la función de Wigner decrecen con la distancia a la trayectoria clásica.

Además la función de Wigner tiene valores negativos los cuales son interpretados por algunos autores [31] como efectos no clásicos (la misma característica se presenta en los otros casos).

La función de Wigner de Linde (véase la figura 5) tiene un comportamiento similar que el caso anterior, pero la trayectoria clásica no se halla sobre el pico más alto, tal y como se muestra en la figura 6. Se aprecian más fluctuaciones de la función de Wigner a la izquierda de la región acotada por la trayectoria clásica, mientras que fuera de esta región los picos de las oscilaciones reducen drásticamente sus amplitudes.

Más aun, para los casos de Hartle-Hawking y Linde, las funciones de onda de Wigner tienen términos de interferencia que corresponden a burbujas que se expanden y contraen. La diferencia entre ellas es un signo opuesto en el término de interferencia de las funciones de onda (30) y (32).

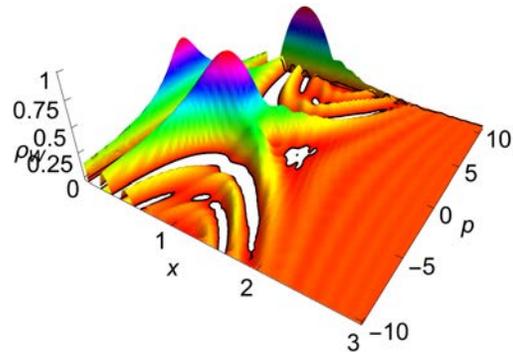


Fig. 5. Función de Wigner para la función de onda de Linde (para  $\mu = \hbar = 1$ ). La figura muestra una reducción en la amplitud de las oscilaciones en la región izquierda limitada por la trayectoria clásica comparada con el caso de Hartle-Hawking.

La función de Wigner de Vilenkin Wigner (véase la figura 7) se construye con la función de onda correspondiente a una burbuja que se expande. En este caso los términos de interferencia están ausentes y esta imagen corresponde al típico proceso de tunelamiento. Por esta razón los picos de la función de Wigner se hallan cerca de la trayectoria clásica asociada con valores positivos para el momento. Debe notarse que la función de Wigner para la condición de Hartle-Hawking tiene una amplitud más pequeña en comparación con las condiciones de frontera de Linde y Vilenkin.

Desde el punto de vista de la cosmología cuántica (si la burbuja representa un universo 2-dimensional), este resultado sugiere que el límite clásico del universo

cuántico es difícil del obtener puesto que existen oscilaciones de la función de Wigner para los tres casos considerados. Como se ha hecho notar anteriormente, el pico más alto de la función de Wigner de Hartle-Hawking se halla sobre la trayectoria clásica; sin embargo, puede ser más fácil alcanzar la decoherencia de la función de Wigner de Vilenkin puesto que tiene menos oscilaciones comparada con los otros casos (debido a los términos de interferencia que no están presentes pues existe sólo un universo expandiéndose alrededor de  $p = 0$ ).

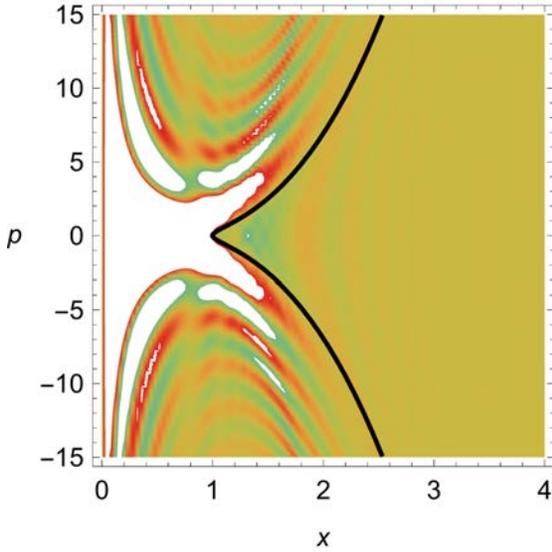


Fig. 6. La proyección de densidad de la función de Wigner de Linde. En este caso, la trayectoria clásica no coincide con el pico más alto de su función de Wigner correspondiente.

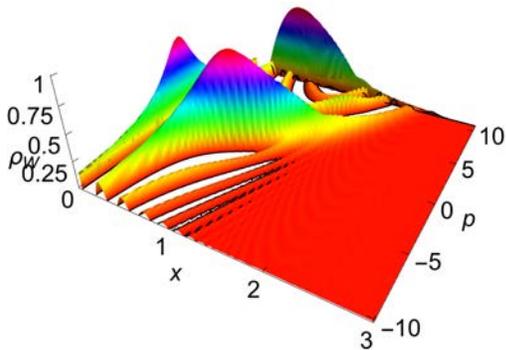


Fig. 7. La función de Wigner de Vilenkin (para  $\mu = \hbar = 1$ ). Puede observarse un máximo claro y pocas oscilaciones comparadas con la función de Wigner de Hartle-Hawking.

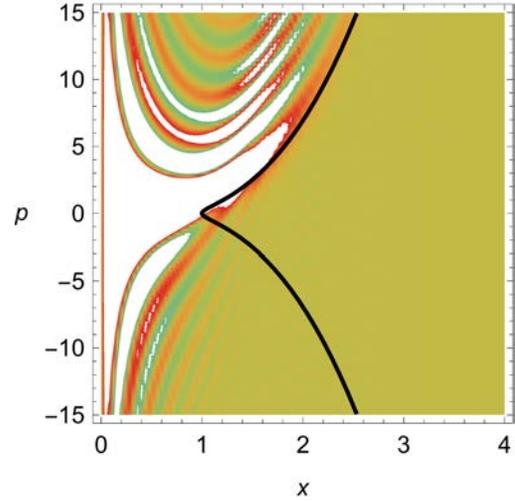


Fig. 8. La proyección de densidad de la función de Wigner de Vilenkin. La trayectoria clásica coincide en algunas partes con los máximos de la función de Wigner y tiene sólo una rama.

### 3. Conclusiones

La descripción del espacio fase cuántico de un sistema físico es un escenario general en donde las coordenadas y los momentos se encuentran presentes de manera simultánea y donde las propiedades físicas pueden apreciarse en una forma más completa con respecto a una representación particular. El objetivo principal en esta aproximación es la función de Wigner la cual contiene toda la información cuántica en el espacio fase. Esta distribución cuasi-probabilística es útil en la descripción de propiedades semiclásicas y para obtener el límite clásico.

En este trabajo se empleó la descripción del espacio fase cuántico para analizar el comportamiento físico de una 2-brana. Con la finalidad de simplificar este modelo, se redujo el número de grados de libertad considerando sólo una configuración esféricamente simétrica. Se enfocó en el entorno cosmológico y se analizó la dinámica cuántica de una burbuja de verdadero vacío descrita por la tensión de la burbuja.

Con inspiración en la cosmología cuántica se emplearon diferentes condiciones de frontera para la función de onda de la burbuja: las propuestas de Hartle-Hawking, Linde y Vilenkin, y mediante métodos numéricos se obtuvieron sus funciones de Wigner correspondientes.

El comportamiento de la función de Wigner para la condición de Hartle-Hawking posee una forma oscilatoria simétrica alrededor del cero de momento y presenta muchas oscilaciones debidas a términos de interferencia entre las funciones de onda de burbujas en expansión y contracción y el pico más alto corresponde a su trayectoria clásica.

La función de Wigner de Linde Wigner muestra una estructura similar al caso de Hartle-Hawking, donde también existen términos de la función de onda tanto de expansión como de contracción. Sin embargo, esta función tiene más oscilaciones a la izquierda de la región acotada por la trayectoria clásica y menos oscilaciones fuera de esta región con respecto del caso de Hartle-Hawking, debido a una diferencia de signo en el término de interferencia. Más aun, la trayectoria clásica no se halla en el pico más alto de la función de Wigner.

Para la condición de frontera de tunelamiento de Vilenkin, su función de Wigner muestra menos oscilaciones puesto que existe sólo una componente de expansión de la función de onda. Este hecho puede ser explicado puesto que no existen términos de interferencia. Además, la trayectoria clásica se halla cerca del valor máximo de la función de Wigner. Hay que hacer notar que la decoherencia de la función de Wigner de Vilenkin parece ser más fácil puesto que los términos de interferencia se encuentran ausentes.

Los últimos resultados sugieren que si representamos al universo como una burbuja 2-dimensional entonces obtener el límite clásico es complicado, esto como consecuencias de la existencia de oscilaciones en la función de Wigner. Sin embargo, el límite clásico de la función de Wigner para Vilenkin puede ser más fácil de obtener tomando en cuenta que sólo hay un universo en expansión.

El análisis del espacio fase cuántico desarrollado en este trabajo motiva el estudio de otras configuraciones de membranas relativistas. Por ejemplo, puede ser utilizado para analizar las propiedades del modelo del electrón de Dirac y sus posibles generalizaciones. Por otra parte, el formalismo de cuantización por deformación es uno de los métodos más generales para cuantizar sistemas arbitrarios [26,44,45] y puede llevarnos a obtener expresiones analíticas para la función de Wigner en otros objetos extendidos relativistas. Se confía que la aproximación anterior puede conducirnos a nuevos resultados y en principio poder analizar el límite clásico de una manera más sistemática. Estos proble-

mas forman parte de la investigación actual.

## Referencias

- [1] Chountasis, S. and Vourdas, A., Phys. Rev. A **58** (1998) 1794.
- [2] Hirshfeld, A. and Henselder, P. Am. J. Phys. **70** (2002) 537.
- [3] Vilenkin, A. and Shellard, P., *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University Press, 2000.
- [4] Polchinski, J., *String Theory Vol. II: Superstring Theory and Beyond*, Cambridge University Press, 1998.
- [5] Green, M., Schwarz, J., and Witten, E., *Superstring Theory, Vol. 1 and Vol. 2*, Cambridge University Press, 1987.
- [6] Bonazzola, S. and Peter, P., *Astropart. Phys.* **7** (1997) 161.
- [7] Gangui, A., Peter, P., and Boehm, C., Phys. Rev. D **57** (1998) 2580.
- [8] Peter, P., *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 3111.
- [9] Blanco-Pillado, J. J., Olum, K. D., and Vilenkin, A., Phys. Rev. D **66** (2002) 023506.
- [10] Randall, L. and Sundrum, R., Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690.
- [11] Randall, L. and Sundrum, R., Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370.
- [12] Atkatz, D. and Pagels, H., Phys. Rev. D **25** (1982) 2065.
- [13] Hartle, J. B. and Hawking, S. W., Phys. Rev. D **28** (1983) 2960.
- [14] Vilenkin, A., Phys. Lett. B **117** (1982) 25.
- [15] Vilenkin, A., Phys. Rev. D **50** (1994) 2581.
- [16] Vilenkin, A., Phys. Rev. D **58** (1998) 067301.
- [17] Ali, T. and Englis, M., *Rev. Math. Phys.* **17** (2005) 391.
- [18] Zachos, C., Fairlie, D., and Curtright, T., *Quantum mechanics in phase space*, volume 34, World Scientific Series in 20th Century Physics, 2005.
- [19] Kurtsiefer, C., Pfau, T., and Mlynek, J., *Nature* **386** (1997) 150.
- [20] Ourjoumtsev, A., Jeong, H., Tualle-Brouiri, R., and Grangier, P., *Nature* **448** (2007) 784.
- [21] Deleglise, S. et al., *Nature* **455** (2008) 510.
- [22] García-Compeán, H., Plebański, J., Przanowski, M., and Turrubiates, F. J., *J. Phys. A* **33** (2000) 7935.
- [23] Guth, A. H. and Tye, S. H., Phys. Rev. Lett. **44** (1980) 631.
- [24] Sato, K., *Physics Letters B* **99** (1981) 66 .
- [25] Woodhouse, N. M. J., *Geometric Quantization*, Oxford Science Publications, 1997.
- [26] Dito, G. and Sternheimer, D., Deformation quantization: genesis, developments, and metamorphoses, in *Proceedings of the Meeting Between Mathematicians and Theoretical Physicists (Strasbourg, 2001)*, volume 1 of *IRMA Lectures in Math. Theoret. Phys.*, pages 9–54, 2002.
- [27] Dragoman, D., *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing* **2005** **10** (2005) 1520.
- [28] Muckenheimer, W. et al., *Physics Reports* **133** (1986) 337 .
- [29] Landsberg, P. T., *Nature* **326** (1987) 338.
- [30] Feynman, R., Negative probability, in *Essays in Honor of David Bohm*, B Hiley and F Peat eds, pages 235–248, 1987.
- [31] Lütkenhaus, N. and Barnett, S. M., Phys. Rev. A **51** (1995) 3340.
- [32] Bondar, D. I., Cabrera, R., and Rabitz, H., *quant-ph/1202.3628* .
- [33] Basu, R., Guth, A. H., and Vilenkin, A., Phys. Rev. D **44** (1991) 340.
- [34] Capovilla, R., Guven, J., and Rojas, E., *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **88** (2000) 337.
- [35] Capovilla, R., Guven, J., and Rojas, E., *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) 5563.
- [36] Arriola, E. R., Zarzo, A., and Dehesa, J. S., *J. Comput. Appl. Math.* **37** (1991) 161.

- [37] Kazakov, A. Y. and Slavyanov, S. Y., *Theor. Math. Phys.* **107** (1996) 733.
- [38] Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M., *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, 2007.
- [39] Barrabes, C., Boisseau, B., and Sakellariadou, M., *Phys. Rev. D* **49** (1994) 2734.
- [40] Onder, M. and Tucker, R. W., *Phys. Lett. B* **202** (1988) 501.
- [41] Onder, M. and Tucker, R. W., *J. Phys. A* **21** (1988) 3423.
- [42] Cordero, R., Molgado, A., and Rojas, E., *Phys. Rev. D* **79** (2009) 024024.
- [43] Cordero, R., Molgado, A., and Rojas, E., *Class. Quant. Grav.* **28** (2011) 065010.
- [44] Bayen, F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerowicz, A., and Sternheimer, D., *Ann. Phys.* **111** (1978) 61.
- [45] Bayen, F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerowicz, A., and Sternheimer, D., *Ann. Phys.* **111** (1978) 111.