JOURNAL DE CIENCIA E INGENIERÍA
Vol. 01, No. 1, Agosto de 2009, Páginas 10–12

INVESTIGACIÓN

# Computación Cuántica Geométrica: Modelo Kerr

Mario Vélez y Andrés Sicard
Grupo en Lógica y Computación, Universidad EAFIT, Medellín

**Recibido: 25 de Abril de 2007; Revisado: 20 de Mayo de 2007; Aceptado: 31 de Agosto de 2007**

**Resumen— Se construyen las componentes de la conexión y las componentes de la curvatura de un haz fibrado principal asociado a un modelo de computación cuántica geométrica de -qubit proveniente de la óptica cuántica.**

***Palabras Clave: computación cuántica geométrica, holonomía, conexión, curvatura***

**Abstract— We constructed connection's elements and curvature's elements of a principal fiber bundle, associated with a geometric quantum computation model that proceed of the quantum optic.**

**Keywords:** ***Geometric Quantum Computation, Holonomy, Connection, Curvatura.***

## I. Introducción

En el marco de los desarrollos teóricos actuales se destaca la computación cuántica geométrica [1-5, 8, 10-13], su fundamento reside en las recientes formulaciones geométricas de la mecánica cuántica. La computación cuántica geométrica se nutre de los efectos inherentes a las propiedades geométricas de los espacios en los que se formula la mecánica cuántica.

Hay una extensa lista de efectos cuánticos formulados a partir de las propiedades topológicas y geométricas subyacentes a espacios donde se configura un sistema particular, de todos ellos se destaca, el de la fase de Berry [9], cuya formulación permite derivar una expresión para la holonomía abeliana $U(1)$, la cual no depende del Hamiltoniano, su origen es geométrico. Así mismo la generalización al caso no abeliano, conduce a la formulación de la computación cuántica geométrica con simetría $U(n)$.

El modelo de computación cuántica de -qubit que se presenta, proviene de la óptica cuántica, ha sido desarrollado por Pachos y Zanardi [8] como una posible aplicación del modelo de Zanardi y Rasetti [13]. El modelo de la computación cuántica geométrica también ha sido interpretado, formalizado y generalizado matemáticamente por Fujii [2]. Desde el punto de vista de la física, la computación cuántica geométrica producida por haces coherentes físicamente consiste de las interacciones no lineales efectuadas en un medio Kerr.

## II. Teoría modelo de 1-qubit

El Hamiltoniano que contiene la información del sistema para el caso de las transformaciones sobre un -qubit en un medio Kerr está dado por

$$H_0 = Xn(n-1), \qquad (1).$$

donde $X$ es una constante proporcional al tercer orden de la susceptibilidad no lineal del medio [8], $n$ es el operador número dado por $n = a^\dagger a$, $a$ y $a^\dagger$ son los operadores de destrucción y de creación del oscilador armónico, respectivamente [7].

El subespacio de estados degenerados del Hamiltoniano (1) es generado por los autoestados (qubits base) $|0\rangle$ y $|1\rangle$ de $H_0$, los cuales pertenecen al espacio de Fock $\mathrm{F} = \{|v\rangle; v = 0,1,2,...\}$ que constituye el espacio de autoestados del operador número $n$.

La transformación isoespectral que deja invariante el subespacio de estados degenerados llevada a cabo mediante la evolución adiabática [13], está definida por

$$H(\lambda,\mu) = U^\dagger(\lambda,\mu)\, H_0 U(\lambda,\mu), \qquad (2)$$

donde el operador $U(\lambda,\mu) = D(\lambda)S(\mu)$ es el producto de dos operadores unitarios denominados *displacer* y *squeezer* respectivamente [8], definidos mediante

$$U(\lambda,\mu) = e^{\lambda a^\dagger - \bar{\lambda} a} e^{\mu a^{\dagger 2} - \bar{\mu} a^2} = D(\lambda)S(\mu), \qquad (3)$$

donde $\lambda, \mu$ son parámetro complejos, denominados parámetros de control.

## III. La Conexión

La estructura topológica de la construcción geométrica que se realiza a partir de los subespacios generados por los autoestados degenerados del Hamiltoniano paramétrico (2), permite definir una conexión no abeliana $A$, la cual determina el modo de realizar el transporte paralelo de estados degenerados, conducidos a lo largo de ciclos mediante la evolución adiabática. La conexión de la estructura topológica es antihermítica, $A = -A^\dagger$ donde

$$A = A_\lambda d\lambda + A_\mu d\mu - A_{\bar{\lambda}}^\dagger d\bar{\lambda} - A_{\bar{\mu}}^\dagger d\bar{\mu}\ . \qquad (4)$$

Las componentes de la conexión (4) están dadas por

$$A_{\sigma_i}^{\alpha\beta} = \left\langle \alpha \left| U^\dagger(\lambda,\mu) \frac{\partial}{\partial\sigma_i} U(\lambda,\mu) \right| \beta \right\rangle, \qquad (5)$$

donde $\alpha,\beta \in \{0,1\}$ rotulan los estados degenerados del Hamiltoniano (1) y $\sigma_i \in \{\lambda,\mu\}$ pertenecen al espacio de parámetros de control. El cálculo explícito de $A_\lambda$ en (4) se lleva a cabo con (5), con la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff [2,6], y con

$$\begin{gathered} D(\lambda)^\dagger D(\lambda) = I, \\ S(\lambda)^\dagger S(\lambda) = I, \\ D(\lambda)^\dagger a^\dagger D(\lambda) = a^\dagger + \bar{\lambda} \\ S(\mu)^\dagger a^\dagger S(\mu) = \cosh|\mu| a^\dagger + \frac{\bar{\mu}}{|\mu|} senh|\mu| a. \end{gathered} \qquad (6)$$

De (5) y (6), se encuentra

$$U^\dagger \partial_\lambda U = \frac{\bar{\lambda}}{2} I + \cosh|\mu| a^\dagger + \frac{\bar{\mu}}{|\mu|} senh|\mu| a. \qquad (7)$$

Las componentes del término $A_\lambda$ de la conexión total (4) se obtienen calculando los elementos de matriz del operador (7). Si $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ con $\alpha,\beta \in \{0,1\}$, son los autoestados degenerados de $H_0$, entonces los elementos de matriz de $A_\lambda$ están dados por

$$\begin{aligned} A_\lambda^{\alpha\beta} &= \langle \alpha \mid U^\dagger \partial_\lambda U \mid \beta \rangle \\ &= \frac{\bar{\lambda}}{2} \langle \alpha \mid \beta \rangle + \cosh|\mu| \langle \alpha \mid a^\dagger \mid \beta \rangle \\ &+ \frac{\bar{\mu}}{\mu} senh|\mu| \langle \alpha \mid a \mid \beta \rangle, \end{aligned} \qquad (8)$$

donde los elementos de matriz en (8) se calculan con la ayuda del álgebra de los operadores de creación y destrucción. Estas componentes están dadas por

$$\begin{aligned} A_\lambda^{\alpha\beta} &= \frac{\bar{\lambda}}{2} \delta_{\alpha\beta} + \cosh|\mu| \sqrt{\beta+1} \langle \alpha | \beta+1 \rangle \\ &+ \frac{\bar{\mu}}{|\mu| senh} |\mu| \sqrt{\beta} \langle \alpha | \beta-1 \rangle, \end{aligned} \qquad (9)$$

donde $\delta_{\alpha\beta}$ es el delta de Kronecker. Con base en (9) se definen

$$\begin{aligned} M^{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta} \\ V^{\alpha\beta} &= \sqrt{\beta+1} \langle \alpha | \beta+1 \rangle, \\ R^{\alpha\beta} &= \sqrt{B} \langle \alpha | \beta-1 \rangle, \end{aligned} \qquad (10)$$

Los elementos de (10) al ser reemplazados en (9) permiten deducir una expresión general para la componente $A_\lambda$ de la conexión total

$$A_\lambda^{\alpha\beta} = \frac{\bar{\lambda}}{2} M^{\alpha\beta} + \cosh|\mu| V^{\alpha\beta} + \frac{\bar{\mu}}{|\mu|} senh|\mu| R^{\alpha\beta}, \qquad (11)$$

donde las matrices asociadas a los elementos de matriz definidos en (11) son

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Con base en (11) y (12), después de simplificar, se obtiene una expresión para la componente $A_\lambda$ de la conexión total

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{\bar{\lambda}}{2} & \frac{\bar{\mu}}{|\mu|} senh|\mu| \\ \cosh|\mu| & \frac{\bar{\lambda}}{2} \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

La forma explícita de $A_\mu$ en (4) se encuentra con las componentes dadas en (5) y utilizando un procedimiento similar al desarrollado hasta encontrar la matriz (13)

$$A_\mu^{\alpha\beta} = \frac{\bar{\mu}\, senh^2|\mu|}{2|\mu|^2} \left(\beta + \frac{1}{2}\right) M^{\alpha\beta}, \qquad (14)$$

donde la matriz $M^{\alpha\beta}$ está dada en (10) y $\alpha,\beta$ toman valores en el conjunto $\{0,1\}$. La forma matricial de $A_\mu$ en (14) es

$$A_\mu = \frac{\bar{\mu}\, senh^2|\mu|}{4|\mu|^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

## IV. La Curvatura

Las componentes de la $2$-forma de curvatura del modelo de $1$-qubit se calculan a partir de

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \left[A_\mu, A_\mu\right]. \qquad (16)$$

En el presente modelo solo se calculan las componentes de la curvatura que se obtienen a partir de las componentes de la conexión que conmutan entre sí. Las componentes de la conexión definidas en (13) y (15) para un $1$-qubit generan el siguiente conjunto de componentes de la $2$-forma de curvatura $F$ en la parametrización particular $\lambda = x + iy, \quad \mu = r_1 e^{i\theta_1}$

$$F_{xy_1} = i[\hat{\sigma}_2(0) senh\, r_1 - \hat{\sigma}_2(\theta)\cosh r_1],$$
$$F_{Yy_1} = -i[\hat{\sigma}_1(0) senh\, r_1 + \hat{\sigma}_1(\theta)\cosh r_1], \tag{17}$$
$$F_{y_1\theta_1} = \frac{i}{4} senh 2r_1 \hat{S}_3,$$

donde $\hat{\sigma}_1(\theta)$, $\hat{\sigma}_2(\theta)$ y $\hat{S}_3$ están dadas por

$$\hat{\sigma}_1(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta_1} \\ e^{i\theta_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\theta_1} \\ ie^{i\theta_1} & 0 \end{pmatrix},$$
$$\hat{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Las ecuaciones definidas en (18) satisfacen el siguiente conjunto de relaciones de conmutación

$$\left[\hat{\sigma}_1(\theta), \hat{S}_3\right] = 2i\hat{\sigma}_2(\theta),$$
$$\left[\hat{\sigma}_2(\theta), \hat{S}_3\right] = -2i\hat{\sigma}_1(\theta) \quad \left[\hat{\sigma}_1(\theta), \hat{\sigma}_2(\theta)\right] = 2i\left(I - \hat{S}_3\right). \tag{19}$$

A partir de la conexión (4) para el modelo de $1$-qubit, y la correspondiente conexión para un modelo de 2-qubit, se establece la universalidad de la computación cuántica geométrica en el modelo Kerr [10].

## V. Conclusiones

Partiendo de un modelo físico derivado de la óptica cuántica y partiendo de la estructura degenerada del hamiltoniano asociado al modelo, se construyo la conexión no abeliana más general de un modelo de computación cuántica geométrica de $1$-qubit en un medio Kerr. Además a partir de esta conexión se dedujo las componentes de la curvatura derivadas de las componentes de la conexión que conmutan entre sí, para un caso particular de los parámetros de control.


## Agradecimientos

Este artículo hace parte del proyecto de investigación “Computación Cuántica Geométrica No Abeliana, No. PY0117” financiado por la universidad EAFIT.


## Referencias


[1] Kazuyuki Fujii “More on optical holonomic quantum computer”, Eprint: arXiv.org/abs/quant-ph/0005129 (2000).

[2] Kazuyuki Fujii. “Note on coherent states and adiabatic conections, curvatures”,. Journal Mathematical Physics **41**, 4406-4412 (2000).

[3] Kazuyuki Fujii. “Mathematical foundations of holonomic quantum computer”, Reports on Mathematical Physics **48**, 75-82 (2001).

[4] Kazuyuki Fujii. “Mathematical foundations of holonomic quantum computer II”, . Eprint: arXiv.org/abs/quant-ph/0101102 (2001).

[5] Kazuyuki Fujii. “Introduction to coherent states and quantum information theory”, Eprint: arXiv.org/abs/quant-ph/011290 (2002).

[6] KazuyuiI Fujii y Tatsuo Susuki. A universal disentangling formula for coherent states of Perelomov´s type. Eprint: arXiv.org/abs/quant-ph/9907049 (1999).

[7] A. Galindo y P. Pascual. “Mecánica cuantica”. Madrid: Editorial Alhambra, S.A. (1978).

[8] Jiannis Pachos y Paolo Zanardi, “Quantum holonomies for quantum computing”, Eprint: arXiv.org/abs/quant-ph/0007110 (2001).

[9] Alfred Shapere y Frank Wilkzek, “Geometric phases in physics”. Advanced series in mathematical physics (**vol. 5**). Singapur: World Scientific (1989).

[10] Andrés Sicard y Mario Vélez, “Universalidad de la computación cuántica geométrica: modelo del medio Kerr”, Revista Colombiana de Física, 36(1):230–234, 2004.

[11] Andrés Sicard y Mario Vélez., “Universalidad de la computación cuántica geométrica: modelo de tres estados”, Revista Ingeniería y Ciencia 1, 5-20 (2005).

[12] Mario Vélez y Andrés Sicard, “Computación cuántica geométrica: modelo de tres estados”, Revista Colombiana de Física, 36(1):226–229, 2004.

[13] Paolo Zanardi y Mario Rasetti, “Holonomic quantum computation”, Physics Letters A **264,** 94-99 (1999).