Journal de Ciencia e Ingeniería, Vol.5, No.1, Agosto de 2013, pp. 12-19
Investigación - Matemáticas

SVD de una Matriz Arbitraria

SVD of an Arbitrary Matrix

J. H. Caltenco [a] ⋆ , J. López-Bonilla [a] ⋆⋆ B. Carvajal-Gámez [b], P. Lam [c],

[a] *ESIME-Zacatenco, Instituto Politécmico Nacional (IPN), Anexo Edif. 5, Col. Lindavista CP 07738 México DF*
[b] *SEPI-ESCOM, IPN, Av. Bátiz S/N, Col. Nueva Industrial Vallejo, C.P. 07738, Mééxico DF*
[c] *ESFM-IPN,Departamento de Matemáticas, Edif. 9, Zacatenco, C.P. 07738, Mééxico DF*

Recibido: 13/01/2013; revisado: 14/2/2013; aceptado: 20/5/2013.

Caltenco, J. H., López-Bonilla, J., Carvajal-Gámez, B.: SVD de una Matriz Arbitraria. Jou.Cie.Ing. **5** (1): 12-19, 2013. ISSN 2145-2628.

Resumen

Para una matriz $A_{n\times m}$ se expone su Descomposición del Valor Singular (SVD), mostrándose con precisión en qué subespacios A está activada, lo cual conduce de manera natural a la pseudoinversa de Moore-Bjenhammar-Penrose. Se estudia la compatibilidad del sistema lineal asociado con A y también se analiza la unicidad de la correspondiente solución. Nuestro enfoque conduce a la clasificación de sistemas lineales introducida por Lanczos y establece que la mencionada pseudoinversa proporciona la solución de Mínimos Cuadrados para sistemas sobre-determinados $(n > m)$.

***Palabras Claves*:** Descomposición del valor singular, matriz inversa natural, método de mínimos cuadrados.

Abstract

It is presented the Singular Value Decomposition (SVD) for a matrix $A_{n\times m}$, with its subspaces of activation which leads in natural manner to pseudoinverse of Moore-Bjenhammar-Penrose. Here is studied the compatibility of the linear system associated with A and the unicity of the corresponding solution. This approach implies the Lanczos classification for linear systems and shows that the mentioned pseudoinverse gives the least squares solution for over-determined systems $(n > m)$.

***Keywords*:** Singular value decomposition, natural inverse matrix, method of least squares.

1. Introducción

Para cualquier matriz real $A_{n\times m}$, Lanczos [1] construye la matriz simétrica:

$$S_{(n+m)\times(n+m)} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

y resuelve su problema de eigenvalores:

$$S\vec{\omega} = \lambda\acute{\omega} \qquad (2)$$

en donde todos los valores propios son reales, porque S es real y simétrica. Además:

$$\textit{rank}A = p = \textit{No. de eigenvalores positivos}, \qquad (3)$$

recordándose que:

$$1 \leq p \leq m\acute{\imath}n\,(n, m) \qquad (4)$$

⋆ amelia.bucur@ulbsibiu.ro
⋆⋆jlopezb@ipn.mx

Entonces los valores singulares o multiplicadores canónicos, llamados así por Picard [2] y Sylvester [3] respectivamente, siguen el esquema:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_P, -\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_p, 0, 0, \ldots, 0, \quad (5)$$

es decir,

$$\lambda = 0 \text{ tiene multiplicidad } n + m - 2p \quad (6)$$

Sólo en el caso $p = n = m$ existe la posibilidad de que no aparezca el eigenvalor nulo.

Los vectores propios de S, que Lanczos llama ejes esenciales, pueden escribirse en la forma:

$$\vec{\omega}_{(n+m)\times 1} = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

entonces (1), (2) implican el Problema de Eigenvalores Modificado:

$$A_{n\times m}\vec{v}_{m\times 1} = \lambda \vec{u}_{n\times 1}, \quad A^T_{m\times n}\vec{u}_{n\times 1} = \lambda \vec{v}_{m\times 1}, \quad (8)$$

es decir

$$A^T A\vec{v} = \lambda^2 \vec{v}, \quad AA^T \vec{u} = \lambda^2 \vec{u}, \quad (9)$$

siendo de especial interés los vectores asociados con los eigenvalores positivos porque permiten introducir las matrices:

$$U_{n\times p} = \left(\vec{u_1}\vec{u_2}\ldots\vec{u_P}\right), V_{m\times p} = \left(\vec{v_1}\vec{v_2}\ldots\vec{v_p}\right), \quad (10)$$

verificando

$$U^T U = V^T V = I_{p\times p}, \quad (11)$$

debido a la ortonormalidad

$$\vec{u_j}^T \vec{u_k} = \vec{v_j}^T \vec{v_k} = \delta_{jk}, \quad (12)$$

Por lo tanto, $\vec{\omega}_j^T \vec{\omega}_k = 2\delta_{jk}, j, k = 1, 2, \ldots, p$. Así, la importante SVD (Singular Value Decomposition) expresa [1,4–6] que A es el producto de tres matrices:

$$A_{n\times m} = U_{n\times p}\Lambda_{p\times p}V^T_{p\times m}, \quad (13)$$

con

$$\Lambda = Diag\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\right) \quad (14)$$

Obsérvese que en 13 y 14 sólo participan los valores singulares positivos, es decir, en la construcción de A no se necesita información relacionada con el eigenvalor cero. En la Sec. 3 se muestra que $\lambda = 0$ permite estudiar la existencia y unicidad de las soluciones de un sistema lineal asociado con A.

Este enfoque de Lanczos es semejante [7] al de Schmidt [8] y Jordan [9,10], de hecho, de éste, Sylvester [3] y Beltrami [11] pueden considerarse los descubridores de la SVD [12], y existe amplia literatura [13–21] sobre esta factorización matricial y sus aplicaciones.

En la Sec. 2 se efectúa un estudio detallado de los vectores propios $\vec{\omega}_j, j = 1, \ldots n + m$ correspondientes a los eigenvalores [5], lo cual conduce a los subespacios de activación de A y a la pseudoinversa de Moore [22] -Bjerhammar [23] -Penrose [24]. La Sec. 3 está dedicada al análisis de la compatibilidad de sistemas lineales, con especial énfasis en la importante participación del valor singular cero y de sus correspondientes eigenvectores. La Sec. 4 concierne a la SVD aplicada, vía la pseudoinversa [25, 26], al problema de Mínimos Cuadrados [27, 28].

2. Subespacios de activación de A y matriz inversa natural

De acuerdo a 9, los vectores propios asociados a los eigenvalores positivos satisfacen:

$$A\vec{v_j} = \lambda_j \vec{u_j}, \quad A^T \vec{u_j} = \lambda_j \vec{v_j}, \quad j = 1, \ldots \quad (15)$$

de donde

$$A\left(-\vec{v_j}\right) = \left(-\lambda_j\right) \acute{u}_j, \quad A^T \vec{u_j} = \left(-\lambda_j\right)\left(-\vec{v_j}\right) \quad (16)$$

es decir

$$S\begin{pmatrix} \vec{u_k} \\ \vec{v_k} \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} \vec{u_k} \\ \vec{v_k} \end{pmatrix}$$

implica

$$S\begin{pmatrix} \vec{u_k} \\ -\vec{v_k} \end{pmatrix} = -\lambda_k \begin{pmatrix} \vec{u_k} \\ -\vec{v_k} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Entonces los eigenvectores $\begin{pmatrix} \vec{u_j} \\ \vec{v_j} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \vec{u_j} \\ -\vec{v_j} \end{pmatrix}$, corresponden a los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ y a $-\lambda_1, \ldots, -\lambda_p$, respectivamente, dando así un total de $2p$ vectores propios de S no relacionados al eigenvalor cero. De 6 se observa la existencia de $n + m - 2p$ eigenvectores ligados al valor propio nulo, que se denotarán por $\vec{\omega_r}$, verificándose 8 y 9 con $\lambda = 0$:

$$\dot{\vec{\omega_j}} = \begin{pmatrix} \dot{\vec{u_j}} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, A^T \dot{\vec{u_j}} = \vec{0}, \quad j = 1, \ldots, n-p \tag{18}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_{(n-p)+k} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dot{\vec{v_k}} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$A\dot{\vec{v_k}} = \vec{0}, \quad k = 1, \ldots, m-p.$$

Las condiciones 19 pueden multiplicarse por A y A^T, así $\dot{\vec{u_j}}$ y $\dot{\vec{v_k}}$ son eigenvectores de las matrices de Gram AA^T y $A^T A$:

$$\left(AA^T\right)_{n\times n} \dot{\vec{u_j}} = \vec{0}, \quad \left(A^T A\right)_{m\times m} \dot{\vec{v_k}} = \vec{0}, \tag{20}$$

y como cada una de ellas ya tiene p vectores propios para $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (véase 9)), entonces sólo existen $n-p$ y $m-p$ vectores $\dot{\vec{u_j}}$ y $\dot{\vec{v_k}}$, que pueden seleccionarse nortonormales:

$$\left(\dot{\vec{u_j}}\right)^T \dot{\vec{u_r}} = \delta_{jr}, \quad \dot{\vec{v_k}}^T \dot{\vec{v_r}} = \delta_{kr}, \tag{21}$$

es decir, $\dot{\vec{\omega}}_j^T \dot{\vec{\omega_k}} = \delta_{jk}$, de modo que $\{\dot{\vec{u}}_j\}$ y $\{\dot{\vec{v}}_k\}$ son bases para el *Kernel* A^T y el *Kernel* A, respectivamente.

Si en 17 se emplea 13 [SVD de A] se obtiene $V\Lambda U^T \dot{\vec{u}}_j = \vec{0}$, que al multiplicar por la izquierda con $\Lambda^{-1} V^T$, y recordando 11, da la condición de compatibilidad:

$$U^T \dot{\vec{u_j}} = \vec{0} \overset{(10)}{\Rightarrow} \vec{u}_r^T \dot{\vec{u}}_j = 0, \tag{22}$$
$$r = 1, \ldots, p, \quad j = 1, \ldots, n-p$$

es decir,

$$Col\ U \perp \dot{\vec{u}}_k, \quad k = 1, \ldots, n-p \tag{23}$$

De forma similar, al utilizar la SVD en 19 y multiplicar por $\Lambda^{-1} U^T$, resulta que:

$$V^T \dot{\vec{v_k}} = \overrightarrow{0}, \vec{v}_r^T \dot{\vec{v}}_k = 0, \tag{24}$$

donde $r = 1, \ldots, p, \quad k = 1, \ldots, m-p$.

$$\therefore\ Col V \perp \dot{\vec{v}}_j,\ j = 1, \ldots, m-p. \tag{25}$$

Es conveniente hacer dos observaciones:

1. Con la importante expresión $A = U\Lambda V^T$ es claro que las matrices U, V y Λ permiten construir A, pero al respecto puede lograse más precisión concentrándose en la estructura de A y su transpuesta:

$$A = (\vec{a_1} \ldots \vec{a_m}), \quad A^T = (\vec{c_1} \ldots \vec{c_n}), \tag{26}$$

en donde $(\vec{a_j})_{n\times 1}$ y $(\vec{c_k})_{m\times 1}$ son las correspondientes columnas. Entonces con 1 pueden obtenerse las expresiones:

$$\begin{aligned} \vec{a_j} &= \lambda_1 v_1^{(j)} \vec{u_1} + \ldots + \lambda_p v_p^{(j)} \vec{u_p} \\ \vec{c_k} &= \lambda_1 u_1^{(k)} \vec{v_1} + \ldots + \lambda_p u_p^{(k)} \vec{v_p}, \end{aligned} \tag{27}$$

donde $j = 1, \ldots, m$ y $k = 1, \ldots, n$ con la notación:

$$v_r^{(j)} = \text{Componente } j \text{ del vector } \vec{v_r}, \tag{28}$$

y análogamente para $u_r^{(k)}$. Nótese que $\vec{c_k}^T$ son las filas de *A*. De 50 se desprenden las igualdades de subespacios

$$Col A = Col U, Fil A = Col V, \tag{29}$$

y como $dim Col\ U = dim Col\ V = p$, se concluye que:

$$rank A = dim Col A = dim Fil A = p \tag{30}$$

lo cual justifica 3.

2. Se tiene el teorema de rango-nulidad [28–30]:

$$dim(Kernel A) + rank A = m, \tag{31}$$

que en unión de 30 implica $dim(Kernel A) = m-p$, por esta razón existen $(m-p)$ vectores $\dot{\vec{v}}_k$ cumpliendo 19. Similarmente,

$$dim(Kernel A^T) + rank A^T = n, \tag{32}$$

y como $rank A^T = rank A = p$, entonces $dim(Kernel A^T) = n-p$ en armonía con los $(n-p)$ vectores $\dot{\vec{u}}_j$ verificando 18.

Si $A_{n\times m}$ actúa sobre un vector arbitrario $\vec{x} \in E_m$ produce un vector $\vec{y} \in E_n$, y en general se tendrán las descomposiciones:

$$\vec{x} = \dot{\vec{x}} + \vec{x}_{CV}, \quad \vec{y} = \dot{\vec{y}} + \vec{x}_{CU}, \tag{33}$$

en donde

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} \in Kernel\ A, \quad \vec{x}_{CV} \in Col\ V, \\ A\dot{\vec{x}} = \vec{0}, \quad \dot{\vec{x}}^T \vec{x}_{CV} = 0, \\ \dot{\vec{y}} \in Kernel\ \ \ A, \quad \vec{y}_{CV} \in Col\ U, \\ A\dot{\vec{y}} = \vec{0}, \quad \dot{\vec{y}}^T \vec{y}_{CU} = 0, \end{aligned} \tag{34}$$

entonces se dice que *A* está activada en los subespacios *Col U* y *Col V*.

Por lo tanto $A\vec{x} \overset{(10)}{\Rightarrow} A\vec{x}_{CV} = \vec{y}$, así en la construcción de $\vec{y}$ se pierde la información concerniente a $\dot{\vec{x}}$, lo cual imposibilita recuperar $\vec{x}$ a partir de $\vec{y}$, es decir, no existe una "matriz inversa"que actúe sobre $\vec{y}$ para dar $\vec{x}$. Sin embargo, cuando $\dot{\vec{x}} = \vec{0} \wedge \dot{\vec{y}} = \vec{0}$ sí es posible implementar una "matriz inversa natural", llamada así por Lanczos, la cual coincide con la pseudoinversa de Moore [22]-Bjerhammar [23]- Penrose [24]:

"Toda matriz $A_{n\times m}$, restringida a sus subespacios de activación, siempre es invertible". (35)

En efecto, sea $\vec{x}$ un vector arbitrario en *Col V*:

$$\vec{x} = q_1\vec{v}_1 + \ldots + q_p\vec{v}_p, \tag{36}$$

entonces por 8:

$$A\acute{x} = q_1\lambda_1\acute{u}_1 + \ldots + q_p\lambda_p\acute{u}_p = \acute{y} \in Col\ U, \tag{37}$$

y ahora se busca la inversa natural $A_N^{-1} m\times n$ tal que:

$$A_N^{-1}\acute{y} = \acute{x}, \tag{38}$$

o más generalmente:

$$\begin{aligned} A_N^{-1}A\vec{x} &= \vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in ColV, \\ AA_N^{-1}\vec{y} &= \acute{y}, \quad \forall \vec{y} \in Col\ U, \end{aligned} \tag{39}$$

Si en 37 se aplica la descomposición 13 resulta la inversa:

$$A^{-1}_{Nm\times n} = V_{m\times p}\Lambda^{-1}_{p\times p}U^T_{p\times n} \tag{40}$$

que permite verificar 38 y 40. Además, (11, 13, 39, 40) implican:

$$\begin{aligned} \left(VV^T\right)\vec{x} &= \vec{x}\ \forall \vec{x} \in ColV, \\ \left(UU^T\right)\vec{y} &= \vec{y}\ \forall \vec{y} \in ColU. \end{aligned} \tag{41}$$

Así 35 es cierto, cualquier matriz es invertible dentro de sus subespacios de activación. Con 40 es sencillo comprobar las propiedades 39:

$$\begin{aligned} AA_N^{-1}A = A, \quad A_N^{-1}AA_N^{-1} = A_N^{-1}, \\ \left(AA_N^{-1}\right)^T = AA_N^{-1}, \quad \left(A_N^{-1}A\right)^T = A_N^{-1}A \end{aligned} \tag{42}$$

las cuales caracterizan a la pseudoinversa de Moore-Bjerhammar-Penrose, es decir, la matriz inversa de estos autores coincide con la inversa natural 40 obtenida por Lanczos [1,4–6].

En la factorización 11 aportada por la técnica SVD sólo participan los valores propios positivos de S, ahí no está la presencia explícita de los vectores $\dot{\vec{u}}_j$ y $\dot{\vec{v}}_k$ asociados con el eigenvalor nulo, entonces es natural preguntar qué papel desempeña la información relacionada con $\lambda = 0$. En la Sec. 3 se estudian sistemas lineales en donde *A* es la correspondiente matriz de coeficientes, probándose que los $\dot{\vec{u}}_j$ permiten investigar la compatibilidad de dichos sistemas, y en caso de éstos ser consistentes entonces con los $\dot{\vec{v}}_k$ se analiza la unicidad de la solución. En otras palabras, el eigenvalor cero no participa si el interés sólo radica en *A* como operador algebraico y en su factorización; pero $\lambda = 0$ es relevante cuando *A* actúa como matriz de coeficientes de un sistema lineal.

3. Compatibilidad de sistemas lineales

Un sistema lineal de *n* ecuaciones con *m* incógnitas puede representarse en la forma matricial:

$$A_{n\times m}\vec{x}_{m\times 1} = \vec{b}_{n\times 1}, \tag{43}$$

con $\vec{x}$ el vector incógnita y $\vec{b}$ el vector de resultados, en donde la descomposición 11 implica $U\Lambda V^T\vec{x} = \vec{b}$ que al multiplicar con $\dot{\vec{u}}_j^T$ da las importantes condiciones de compatibilidad:

$$\dot{\vec{u}}_j \cdot \vec{b} = \dot{\vec{u}}_j^T\vec{b} = 0 j = 1, \ldots, n-p, \tag{44}$$

porque de 23 se tiene que todo $\dot{\vec{u}}_j$ es ortogonal a $Col\ U$. Así se tiene que el sistema 44 es compatible (o consistente), es decir, admite solución (con o sin unicidad) si es perpendicular a todos los $\dot{\vec{u}}_j$ que son soluciones independientes del sistema adjunto $A^T\vec{u} = \vec{0}$, (véase 18). Por lo tanto

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ es consistente si } \vec{b} \in Col\ U \tag{45}$$

que es la formulación tradicional [6] de la condición de compatibilidad para un sistema lineal dado. Con 45 es claro que A y la matriz aumentada $(A\vec{b})$ tienen el mismo espacio columna debido a 29

$$ColA = Col\left(A\vec{b}\right) = Col\ U, \tag{46}$$

es por eso que en los libros [28] se encuentra que:

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ es compatible si } rank A = rank\left(A\vec{b}\right) \tag{47}$$

Si $\vec{b} \in Col\ U$, entonces:

$$\vec{b} = b^{(1)}\vec{u}_1 + \cdots + b^{(p)}\vec{u}_p, \tag{48}$$

debido a 15, tal que

$$\vec{Q} = \frac{b^{(1)}}{\lambda_1}\vec{v}_1 + \cdots + \frac{b^{(p)}}{\lambda_p}\vec{v}_p, \tag{49}$$

que al sustituir en 43 implica:

$$A\left(\vec{x} - \vec{Q}\right) = \vec{0}. \tag{50}$$

Las soluciones de 50 constituyen el *Kernel*, que de acuerdo a 31 tiene dimensión $m - p$, así 50 tiene como única solución al vector cero cuando $p = m$, es decir, cuando *rank* A coincide con el número de incógnitas, no existen vectores $\dot{\vec{v}}_k \neq \vec{0}$, verificando $A\dot{\vec{v}}_k = \vec{0}$, (véase 19). En consecuencia:

El sistema compatible $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución única sólo cuando $p = m$, (51)

además (recuérdese la notación en 28):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \vec{Q} \tag{52}$$

$$\therefore\ x_r = Q^{(r)} = \frac{b^{(1)}}{\lambda_1}v_1^{(r)} + \ldots + \frac{b^{(p)}}{\lambda_p}v_p^{(r)},$$

utilizándose 49. Pero los $\vec{u_j}$ son ortonormales porque verifican 12, así de 48 es inmediato que $b^{(k)} = \vec{b}\cdot\vec{u_k}$, entonces por 52 las incógnitas del sistema lineal 43 son dadas por:

$$x_r = \vec{b}\cdot\vec{t}_r, \quad r = 1, \ldots, m \tag{53}$$

en donde:

$$\vec{t_r} = \frac{v_1^{(r)}}{\lambda_1}\vec{u}_1 + \ldots + \frac{v_p^{(r)}}{\lambda_p}\vec{u_p} \epsilon\ Col\ U \tag{54}$$

Se hace notar que una vez realizada la SVD de *A*, los *m* vectores $\vec{t_r}$ quedan completamente determinados, y por 53 el valor de cada incógnita se obtiene al proyectar $\vec{b}$ sobre cada vector 54. Por lo tanto, $\vec{b}\epsilon ColU$ garantiza que 43 tiene solución, la cual es única sólo si *p=m* y está dada por 53.

Además, de 49 se observa que la solución $\vec{x} = \vec{Q}$ implica que $\vec{x}\epsilon Col\ V$, entonces se tiene que el sistema $\vec{Ax} = \vec{b}$ en donde $\vec{x}$ y $\vec{b}$ están totalmente inmersos en *Col V* y *Col U*, respectivamente, es decir, $\vec{x}$ y $\vec{b}$ pertenecen a los subespacios de activación de *A*, y por lo efectuado en (19) existe la inversa natural A_N^{-1} tal que:

$$\vec{x} = A_N^{-1}\vec{b} = V_{m\times m}\Lambda_{m\times m}^{-1}U_{m\times n}^T\vec{b}; \quad p = m$$

$$\begin{aligned} &= V\Lambda^{-1}\begin{pmatrix} b^{(1)} \\ \vdots \\ b^{(m)} \end{pmatrix} = V\begin{pmatrix} \frac{b^{(1)}}{\lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{b^{(m)}}{\lambda_m} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{b^{(1)}}{\lambda_1}v_1^{(1)} & +\cdots+ & \frac{b^{(m)}}{\lambda_m}v_m^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{b^{(1)}}{\lambda_1}v_1^{(m)} & +\cdots+ & \frac{b^{(m)}}{\lambda_m}v_m^{(m)} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{55}$$

en completo acuerdo con 52. Los vectores 54 son importantes porque su producto interno con $\vec{b}$ resuelve 43 vía (28.c), sin embargo, también son notables porque permiten construir la inversa natural:

$$A_N^{-1}m \times n = \left(\vec{t}_1\vec{t}_2\ldots\vec{t}_m\right)^T, \quad p = m. \tag{56}$$

Lanczos [6] considera tres situaciones:

1. $n<m$
   El sistema lineal es sub-determinado porque tiene más incógnitas que ecuaciones, y por 4 es claro que no es posible *p=m*, en consecuencia, si 43 es compatible entonces su solución carece de unicidad.
2. $n = m$
   Aquí existe igualdad en el número de ecuaciones y de incógnitas, y el sistema posee solución única cuando *p=m* que equivale a *det A≠0*, y la correspondiente solución es obtenible aplicando los diversos métodos tradicionales. Nótese que en este caso también *p=n*, por lo que no existen $\dot{\vec{u}}_j \neq \vec{0}$, así $\vec{b}\ \epsilon Col\ U$ y el sistema es automáticamente consistente.
3. $n > m$
   El sistema 43 es sobre-determinado porque hay más ecuaciones que incógnitas, y por 4 sí puede presentarse *p=m* para solución única si el sistema es compatible. En la Sec. 4 se implementa la SVD, mediante la A_N^{-1} , para resolver el problema de Mínimos Cuadrados vía Álgebra Lineal, lo cual corresponde a un sistema fuertemente sobre-determinado.

Por todo lo anterior, es inmediata la Clasificación de Sistemas Lineales introducida por Lanczos [6]:

spacing

* *Libre y completo:* $p = n = m$; solución única
* *Restringido y completo:* $p = m < n$; solución única, sobre-determinado
* *Libre e incompleto:* $p = n < m$; solución sin unicidad, sub-determinado

* *Restringido e incompleto:* $p < nyp < m$; solución nó única

con los significados: spacing

* *Libre:* Las condiciones 44 se satisfacen trivialmente.

* *Restringido:* Es necesario verificar que $\overrightarrow{b}\,\epsilon\, ColU$.

* *Completo:* La solución tiene unicidad.

* *Incompleto:* La solución no es única.

Cuando *p≠m,* el sistema homogéneo $A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ tiene las soluciones no-triviales $\acute{\dot{v}}_k$, entonces de 50 se concluye que la solución de 43 carece de unicidad:

$$\vec{x} = \vec{Q} + C_1\dot{\vec{v}}_1 + \ldots + C_{m-p}\dot{\vec{v}}_{m-p}, \qquad (57)$$

porque las C_k son constantes arbitrarias.

4. Mínimos cuadrados vía la matriz inversa natural

Aquí se muestra cómo formular matricialmente el Método de Mínimos Cuadrados de Gauss-Legendre [31], en donde el conjunto de datos (z_k, b_K), *k*=1,. . . , *n*, debe ajustarse a cierta relación funcional entre las variables z y *b*, por ejemplo, supóngase que dicha conexión es lineal:

$$x_1 + x_2 z = b, \qquad (58)$$

con x_1 y x_2 cantidades a determinar minimizando el error cuadrático:

$$E = \sum_{k=1}^{n} \left(x_1 + x_2 z_k - b_k\right)^2, \qquad (59)$$

lo cual significa que $\frac{\partial E}{\partial x_1} = \frac{\partial E}{\partial x_2} = 0$, resultando las conocidas expresiones:

$$n x_1 + x_2 \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad (60)$$

$$x_1 \sum_{k=1}^{n} z_k + x_2 \sum_{k=1}^{n} z_k^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k z_k \qquad (61)$$

que permiten obtener los parámetros x_1 y x_2.

Las relaciones 60 y 61 pueden deducirse matricialmente sin minimizar explícitamente el error cuadrático 59, en efecto, la conexión 58 debe ser satisfecha por los datos (z_k, b_k):

$$x_1 + z_1 x_2 = b_1, x_1 + z_2 x_2 = b_2, \ldots, x_1 + z_n x_2 = b_n, \qquad (62)$$

generándose así un sistema lineal de n ecuaciones para las incógnitas x_1 y x_2, que en general es sobredeterminado, el cual acepta la forma matricial 43:

$$\begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (63)$$

En 63 se tiene $p = m = 2<n$, por lo que este sistema es completo y restringido en la clasificación de Lanczos, entonces posee solución única si es compatible, y esto se logra si $\vec{b}\epsilon$ *Col U*, así que puede plantearse el problema:

$$A\vec{x} = \vec{b_p}, \qquad \vec{b} = \vec{b_0} + \vec{b_p}; \qquad (64)$$

en donde $\vec{b}$ se ha descompuesto en sus partes $\vec{b_0}\perp Col\ U$ y $\vec{b_p}\epsilon Col\ U$. En 64 los vectores $\vec{x}$ y $\vec{b_p}$ están totalmente inmersos en $Col\ V$ y $Col\ U$, respectivamente, que son los subespacios de activación de *A*, entonces la inversa natural de Moore-Bjerhammar-Penrose-Lanczos da la solución única de 64:

$$\vec{x} = A_N^{-1}\vec{b_p} = V\wedge^{-1}U^T\left(\vec{b} - \vec{b_0}\right) = V\wedge^{-1}U^T\vec{b}, \qquad (65)$$

porque $\vec{b_0}\perp Col\ U$,es decir

$$\vec{x} = A_N^{-1}\vec{b}_\Box = V\wedge^{-1}U^T\vec{b}, \qquad (66)$$

resuelve 64.

Además, de la SVD para *A* se tiene que $A = U\wedge V^T$ y $A^T = V\wedge U^T$, así:

$$A^T A = V\wedge^2 V^T \qquad (67)$$

entonces al multiplicar 4 por la izquierda con $V\Lambda^2 V^T$ resulta

$$A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}, \qquad (68)$$

que es la formulación matricial del Método de Mínimos Cuadrados. En efecto, si en 68 se sustituye *A*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad (69)$$

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{k=1}^{n} z_k \\ \sum_{k=1}^{n} z_k & \sum_{k=1}^{n} z_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} b_k \\ \sum_{k=1}^{n} b_k z_k \end{pmatrix}, \quad (70)$$

que es precisamente el conjunto de ecuaciones 60 - 61 del enfoque tradicional de este importante algoritmo de Gauss-Legendre.

Al comparar 63 con 68 se observa que en $A\vec{x} = \vec{b}$ la falta de compatibilidad se remedió multiplicando por A^{T}, para así obtener un sistema consistente cuya solución única coincide con la del Método de Mínimos Cuadrados. Además, establece que tal solución es proporcionada por la inversa natural A_N^{-1} [23, 27].

5. Conclusiones

Siempre ha existido interés en discretizar operadores continuos, diferenciales o integrales, por ejemplo, Bernoulli [32] (cuerda), Euler [33] (ecuaciones variacionales), Lagrange [34] (sonido), Rayleigh [35] (vibraciones acústicas y elásticas, expansiones ortogonales) y Fredholm [36] (ecuaciones integrales). En opinión de Carathéodory, esta publicación de Euler [33,37] es uno de los más bellos trabajos matemáticos. Fredholm probó que una ecuación integral, del tipo que ahora lleva su nombre, podía discretizarse asociándole una matriz *nn* con determinante no-nulo, y sus resultados quedaron fundamentados gracias a Schmidt [8] (enfoque analítico) y a Hilbert [38] (enfoque geométrico), en donde la teoría de ecuaciones integrales se reduce al estudio del problema de ejes principales de una superficie cuadrática en *En*, para después hacer que $n \to \infty$. Hellinger-Toeplitz [39] opinaron que, en general, no era posible discretizar ecuaciones integrales de tipo distinto al de Fredholm, lo cual corresponde al caso Anm . Sin embargo, Lanczos [6] mostró que la SVD proporciona una plataforma universal para el análisis de operadores diferenciales o integrales, sin importar su tipo o las condiciones de frontera involucradas. Así, es útil tener una detallada exposición de la SVD, como la aquí realizada, que permita una mejor comprensión de los operadores diferenciales o integrales relevantes en Física e Ingeniería.

Referencias

[1] C- Lanczos, Linear Systems in self-adjoint form, Am. Math. Month. 65, No. 9, 665-679, 1958

[2] É. Picard, Sur un théorém général relatif aux intégrales de premiér espéce et sur quelques problémes de physique mathématique, Rend. Circ. Mat. Palermo 25, 79-97, 1910

[3] J.J. Sylvester, Sur la réduction biorthogonale d' une forme linéo-linéaire á sa forme cannonique, Compt. Rend. Acad. Sci, Paris 108, 651-653, 1889

[4] C. Lanczos, Extended boundary value problems, Proc. Int. Congr. Math. Edinburgh-1958, Cambridge Univ. Press, 1960, 154-181.

[5] C. Lanczos, Boundary value problems and orthogonal expansions, SIAM J. Appl. Math. 14, No. 4, 831-863, 1966

[6] C. Lanczos, Linear differential operators, Dover, New York, 1997, Chap. 3

[7] F. Smithies, Linear differential operators, The Mathematical Gazette 47, 265-266, 1963

[8] E. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen integralgleichungen, Teil 1,Mathematische Annalen Bd. 63, 433-476, 1907 and 64, 161-174, 1907

[9] C. Jordan, Mémoire sur les formes bilinéaires, J. de Mathématiques Pures et Appliquées, Deuxieme Série, 19, 35-54, 1874

[10] C. Jordan, Sur la réduction des formes bilinéaires, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 78,614-617, 1874

[11] E. Beltrami, Sulle funzioni bilineari, Giornale di Mathematische 11, 98-106, 1873

[12] G. W. Stewart, On the early history of the SVD, SIAM Review 35, 551-566, 1993

[13] J.J. Sylvester, On the reduction of a bilinear quantic of the nth order to the form of a sum of n products, Messenger of Mathematics 19, 42-46, 1889

[14] L. Autonne, Sur les matrices hypohermitiennes et sur les matrices unitaries, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 156, 858-860, 1913

[15] E. T. Browne, The characteristic roots of a matrix, Bull. Amer. Math. Soc. 36, No. 10, 705-710, 1930

[16] C. Eckart and G. Young. A principal axis transformation for non-hermitian matrices, Bull. Amer. Math. Soc. 45, 118-121, 1939

[17] H. Schwerdtfeger, Direct proof of Lanczos decomposition theorem, Am. Math. Month. 67, No. 9, 855-860, 1960

[18] G. H. Golub, Aspects of scientific computing, Johann Bernoulli Lecture, Univ. of Groningen, 8th April 1996.

[19] V. Gaftoi, J. López-Bonilla and G. Ovando, Singular value decomposition and Lanczos potential, in "Current topics in quantum field theory research", Ed. O. Kovras, Nova Science Pub., New York, 2007, Chap. 10.

[20] H. Yanai, K. Takeuchi and Y. Takane, Projection matrices, generalized inverse matrices, and singular value decomposition, Springer, New York, 2011, Chap. 3.

[21] I. Guerrero M., J. López-Bonilla and L. Rosales R., SVD applied to Dirac supermatrix, The Sci. Tech. (India), Special Issue, 111-114, Aug. 2012

[22] E. H. Moore, On the reciprocal of the general algebraic matrix, Bull. Am. Math. Soc. 26, No. 9, 394-395, 1920

[23] A. Bjerhammar, Application of calculus of matrices to method of least squares, with special references to geodetic calculations, Trans. Roy. Inst. Tech. Stockholm No. 49, 1-86, 1951

[24] R. Penrose, A generalised inverse for matrices, Proc. Camb. Phil. Soc. 51, 406-413, 1955

[25] T.N.E. Greville, Some applications of the pseudoinverse of a matrix, SIAM Rev. 2, No. 1, 15-22, 1960

[26] G. H. Golub and W. Kahan, Calculating the singular values and pseudoinverse of a matrix, SIAM J. Numer. Anal. B2, 205-224, 1965

[27] G. H. Golub and C. Reinsch, Singular value decomposition and least squares solution, Numerische Mathematik 14, 403-420, 1970

[28] G. Nakos and D. Joyner, Linear algebra with applications, Brooks, Cole Pub. Co., New York, 1998, Chap. 8

[29] E. Weyr, Répartition des matrices en espaces et formation de toutes les espaces, C.R. Acad. Sci. Paris 100, 966-969, 1885

[30] E. Weyr, Zur theorie der bilinearen formen, Mon. für Mathematik und Physik 1, 163-236, 1890

[31] C. Lanczos, Applied analysis, Dover New York, 1988, Chap. 5

[32] D. Bernoulli, Theoremata de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaliter suspensae, Comm. Acad. Sci. Imperialis Petropolitanae 6, 108-123, 1732-33

[33] L. Euler, Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive propietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimitrici latissimo sensu accepti, Lausanne, Geneva, 1744

[34] J. L. Lagrange, Recherches sur la nature et la propagation du son, Miscellanea Taurinensia 1, 39-148, 1759

[35] Lord Rayleigh, The theory of sound, Macmillan and Co., London, 1937

[36] I. Fredholm, Sur une classe d´équations fonctionelles, Acta Math. 27, 365-390, 1903

[37] J. Hanc, The original Euler´s calculus-of-variations method: key to Lagrangian mechanics for beginners, `http://www.eftaylor.com/pub/HancEulerMethod.pdf`

[38] D. Hilbert, Lineare Integralgleichungen, Teubner, Leipzing, 1912

[39] E. Hellinger and O. Toeplitz, Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Chelsea Pub. Co. New York, 1953