Journal de Ciencia e Ingeniería, Vol.5, No.1, Agosto de 2013, pp. 44-45
Investigación - Matemáticas

Invariantes Riemannianos

Riemannian Invariants

J. López-Bonilla [a] ⋆ C. Mora-Ley [b], G. Ovando Z. [c]

[a] ESIME-Zacatenco, ICE, Edif.5, Instituto Politécnico Nacional (IPN), México D.F.
[b] CICATA-IPN, Calzada Legaria 694, Col. Irrigación, CP 11500, México D.F.
[c] CBI-Área de Física Atómica Molecular Aplicada, UAM-Azcapotzalco, México D.F.

Recibido: 2/3/2013; revisado: 1/6/2013; aceptado: 31/7/2013.

López-Bonilla, J., Mora-Ley, C., Ovando Z., G.: Invariantes Riemannianos. Jou.Cie.Ing. **5** (1): 44-45, 2013. ISSN 2145-2628.

Resumen

Se consideran ciertos invariantes de 3er. orden en las componentes del tensor de Riemann, y se muestra cómo una combinación lineal de ellos conduce a cuatro interesantes identidades.

***Palabras Claves*:** Escalares Riemannianos, tensores de Ricci y de Riemann, 4-espacios de clase uno.

Abstract

We consider certain invariants of third order in the Riemann tensor components, and we show that a linear combination of them leads to four interesting identities.

***Keywords*:** Riemannian scalars, Ricci and Riemann tensors, 4-spaces of class one.

1. Introducción

Aquí R_{abcd} y$R_{ac} = R^i_{aci}$ son los tensores de Riemann y de Ricci, respectivamente; $R = R^a_a$ representa la curvatura escalar. Para un espacio-tiempo arbitrario se construyen los siguientes invariantes de 3er orden en las componentes del tensor de curvatura:

$$\begin{gathered} b_1 = R^3, \quad b_2 = RR_{bicr}R^{bcir}, \\ b_3 = RR^{bc}R_{bc}, \quad b_4 = R^{bc}R_{br}R^r_c, \\ b_5 = R_{bcir}R^{bc}R_{ir}, \quad b_6 = R^{bcir}R_{crqt}R^{qt}_{bi}, \\ b_7 = R_{bcir}R^{crbj}R^i_j, \quad b_8 = R^{bi}_{cr}R_{cqtb}R^r_{qit}. \end{gathered} \tag{1}$$

para formar la combinación lineal:

$$\sum_{k=1}^{8} a_k b_k = 0 \tag{2}$$

la cual contiene cuatro interesantes identidades para determinados valores de los coeficientes a_k

2. Identidades Riemannianas

En efecto, es conveniente realizar este análisis para cuatro situaciones:

1. Si en (2) se utilizan los valores:

$$\begin{aligned} \frac{8}{5}a_1 = \frac{8}{3}a_2 = -\frac{2}{9}a_3 = \frac{1}{4}a_4 = -\frac{1}{3}a_5 \\ = 2a_6 = a_8 = 1, \quad a_7 = 0, \end{aligned}$$

se obtiene la identidad de Xu [1,2]:

⋆ jlopezb@ipn.mx

$$R^{a}_{icr}R^{c}_{qta}R^{rqit} = 3R^{ac}R_{abcd} + \frac{9}{2}RR^{ab}R_{ab} - \frac{5}{8}R^3 - \frac{1}{2}R^{ab}_{cd}R^{cd}_{ef}R^{ef}_{ab} - \frac{3}{8}RR^{ab}_{cd}R^{cd}_{ab} - Rr^{ab}R_{bc}R^{c}_{a}, \quad (3)$$

válida en todo espacio-tiempo. En [3] la relación 3 fue demostrada empleando conocidas identidades de Lovelock [4,5] y Novello-Duarte [6].

2. Si los parámetros a_k toman los valores:

$$\frac{4}{3}a_2 = -2a_3 = a_4 = -a_5 = -\frac{4}{3}a_6 = -\frac{2}{7}a_7 = 1, \quad a_1 = a_8 = 0,$$

entonces 2 implica la condición necesaria para R_4 de clase uno [7] deducida en [8]:

$$R^{ab}[R_{ar}R^{r}_{b} - R^{cd}R_{acbd} - \frac{1}{2}RR_{ab} + \frac{3}{4}R_{icrq}R^{icrq}g_{ab} - \frac{7}{2}R^{cde}_{b}R_{acde}] - \frac{3}{4}R_{aicr}R^{crqt}R^{ai}_{qt} = 0 \quad (4)$$

3. Si se considera la opción:

$$4a_1 = 4a_2 = -\frac{1}{2}a_3 = \frac{1}{2}a_4 = -\frac{1}{2}a_5 = -a_7 = 1, \qquad a_6 = a_8 = 0,$$

de 2 resulta la identidad de Xu [1,2]:

$$R\left(R^2 + R^{abcd}R_{abcd}\right) + 8R^{ab}\left(R_{ae}R^{e}_{b} - RR_{ab} - R^{cd}R_{acbd} - \frac{1}{2}R^{cde}_{b}R_{acde}\right) = 0, \quad (5)$$

válida para 4-espacios arbitrarios. La expresión 5 se probó en [3] mediante una identidad de Lanczos [9].

4. Finalmente, para los valores:

$$2a_2 = a_5 = -4a_6 = -a_7 = a_8 = 1$$

$$a_1 = a_3 = a_4 = 0,$$

se obtiene la identidad de Lovelock [10]:

$$R_{aicr}\left(\frac{1}{2}RR^{aicr} - \frac{1}{4}R^{crqt}R^{ai}_{qt} + R^{ac}R^{ir} - R^{craj}R^{i}_{j} - R^{cqta}R^{r\ i}_{qt}\right) = 0 \quad (6)$$

verificada por todo R_n inmerso en E_{n+a} [7], $n \geq 4$.

3. Conclusiones

El presente trabajo ilustra la relevancia de diversos invariantes en la inmersión local e isométrica de espacios Riemannianos de clase uno.

Referencias

[1] D. Xu, Phys. Rev. D35, 769, 1987.

[2] A. Harvey, J. Math. Phys. 36, 356, 1995.

[3] J. López-Bonilla, G. Ovando and J. Rivera, Aligarh Bull. Math. 20, 89, 2001

[4] D. Lovelock, Atti. Accad. Naz. Lincei Rend. 42, 187, 1967.

[5] S.B. Edgar, Gen. Rel. Grav. 31, 405, 1999.

[6] M. Novello and J. Duarte, Gen. Rel. Grav. 12, 871, 1980.

[7] H. Goenner, General relativity and gravitation. I, Ed. A. Held, Plenum, NY, 1980.

[8] J. López-Bonilla, J. Morales and G. Ovando, J. Bangladesh Acad. Sci. 26, 203, 2002.

[9] C. Lanczos, Ann. of Math. 39, 842, 1938.

[10] D. Lovelock, Tensor N.S. 22, 274, 1971.