


Antenas delgadas de geometría arbitraria: Segmentación no-equidistante vía las raíces de los polinomios de Legendre

Thin antennas of arbitrary geometry: Non-equidistant segmentation via the Legendre polynomials roots

V. Barrera-Figueroa, J. Sosa-Pedroza, J. López-Bonilla* 
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto
Politécnico Nacional, Ciudad de México, México

Resumen. En este trabajo se propone un método para determinar la distribución de corriente de una antena por medio del método de momentos, usando una segmentación no equidistante, basada en la forma en cómo se distribuyen las raíces de los polinomios de Legendre [1] en el dominio $[-1,1]$. Este método innovador produce un conjunto de datos no equidistantes a partir de los cuales podemos obtener cualquier número de valores equidistantes de corriente por medio de un proceso de interpolación polinomial [2] sin la aparición del fenómeno de Runge-Borel [3]. En la literatura no hemos localizado un método semejante para dividir la antena en forma no equidistante, así que a continuación se presenta una aplicación original del uso de las raíces de Legendre en el electromagnetismo computacional.

Palabras Claves. Interpolación polinomial; raíces de Legendre; cuadratura de Gauss; método de momentos; ecuación de Pocklington.

Abstract. In this paper it is proposed a method for determining the current distribution along an antenna by using the method of moments with a no equidistant segmentation based in the way the Legendre polynomial's roots are distributed in the domain $[-1,1]$. This innovative method produces a set of no equidistant data-points from which we can generate any set of equidistant values of current by means an interpolation process without the appearance of the Runge-Borel phenomenon. We the authors have not find in literature a method for dividing the antenna like the shown straight away, so we think it is an original application of Legendre roots in the computational electromagnetic area.

Keywords. Polynomial interpolation; Legendre roots; Gauss square; moment method; Pocklington equation

Como Citar. V. Barrera-Figueroa, J. Sosa-Pedroza, J. López-Bonilla, "Antenas delgadas de geometría arbitraria: Segmentación no-equidistante vía las raíces de los polinomios de Legendre", *Jou. Cie. Ing.*, vol. 12, no. 1, pp. 243-252, 2020. doi:10.46571/JCI.2020.1.21

Recibido: 02/05/2019 **Revisado:** 27/05/2020 **Aceptado:** 05/08/2020

* e-mail: jlopezb@ipn.mx

1. Introducción

El método de momentos es una técnica numérica que transforma una ecuación operador en una ecuación matricial la cual puede resolverse por medio de los métodos clásicos del análisis numérico. La técnica clásica del método de momentos establece que el dominio del operando sea dividido en segmentos equidistantes en los cuales las condiciones de frontera se cumplan. Sin embargo, una segmentación equidistante conlleva problemas y errores, entre los cuales se menciona la aparición del fenómeno Runge-Borel cuando se aplican métodos de interpolación a la solución numérica obtenida. El método descrito en este trabajo permite eliminar estos problemas y reducir los errores numéricos al dividir el dominio del operando de acuerdo a la forma en como se distribuyen las raíces de los polinomios de Legendre. Por esta razón, en este trabajo se aborda la manera en que estas raíces surgen de manera natural en el proceso de cuadratura numérica por medio de los métodos de interpolación con puntos sencillos y puntos dobles. Finalmente, se aplica este método a la ecuación de Pocklington, la cual establece una relación entre la corriente eléctrica y el campo eléctrico sobre la superficie de la antena, para determinar la distribución de corriente en una antena dipolo de media longitud de onda, y se comparan los resultados con los obtenidos en una segmentación equidistante.

2. Interpolación con puntos sencillos

En el Análisis Numérico se denomina interpolación al procedimiento de construir nuevos puntos a partir de un conjunto discreto de puntos dados. En la ingeniería y las ciencias es común disponer de un cierto número de datos a partir de un muestreo o un experimento con los que se desea construir una función que los ajuste, es decir, que pase por los puntos originales y con la cual puedan determinarse puntos que no fueron medidos o muestreados. Otro problema ligado a la interpolación es la aproximación de una función dada por una más sencilla, mediante la cual pueda simplificarse algún cálculo que requiera muchos pasos. Dentro de los tipos de interpolación polinomial, el más general es el esquema lagrangiano [3], en el cual dados n puntos x_1, x_2, \dots, x_n , se construye un polinomio interpolante $Pol_{n-1}(x)$ de orden $n - 1$ el cual ajusta en los valores muestreados $(x_1), (x_2), \dots, (x_n)$. El algoritmo de Lagrange propone la construcción del polinomio fundamental:

$$F_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n), \quad (1)$$

con el cual se producen las funciones:

$$\varphi_k(x) = \frac{F_n(x)}{x - x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Ahora se introduce el polinomio auxiliar $p_k(x)$ que llega a comportarse como una delta de Kronecker en los puntos de muestreo:

$$p_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\varphi_k(x_k)}, \quad p_k(x_j) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = k \\ 0, & \text{si } j \neq k \end{cases} \quad (3)$$

Finalmente, el polinomio interpolante se escribe en términos de $p_k(x)$ como:

$$Pol_{n-1}x = \sum_{k=1}^n f(x_k)p_k(x), \quad (4)$$

en el cual se comete el error:

$$\eta_n(x) = f(x) - Pol_{n-1}(x), \quad (5)$$

$$\eta_n(x_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

y una estimación de éste es

$$\eta_n x = f^n(\bar{x}) \frac{F_n x}{n!}, \quad \bar{x} \in a, b. \quad (6)$$

3. Interpolación con puntos dobles

A continuación se presenta el estudio del polinomio interpolante de Lagrange cuando dos puntos están tan cercanos que acaban colapsándose en el mismo lugar. Sean tales puntos $x_a = x_k + \mathcal{E}$ y $x_\beta = x_k - \mathcal{E}$, donde \mathcal{E} es un valor muy pequeño que eventualmente tenderá a cero. El correspondiente polinomio fundamental es:

$$F_n(x) = \phi(x)(x - x_a)(x - x_\beta),$$

$$\phi(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \alpha, \beta}}^n (x - x_k). \quad (7)$$

De acuerdo a la técnica de Lagrange [3], los términos del polinomio interpolante asociados a x_a y x_β son:

$$f(x_{\alpha,\beta})P_{\alpha,\beta}(x) = f(x_k \pm \mathcal{E}) \frac{\phi(x)(x - x_k \pm \mathcal{E})}{\pm 2\mathcal{E}\phi(x_k \pm \mathcal{E})} \quad (8)$$

Al tomar el límite cuando \mathcal{E} tiende a cero resulta:

$$\lim_{\mathcal{E} \rightarrow 0} f(x_a)P_a(x) + \lim_{\mathcal{E} \rightarrow 0} f(x_\beta)P_\beta(x) = f(x_k) \frac{\phi(x)}{\phi(x_k)} [1 - (x - x_k) \frac{\phi'(x_k)}{\phi(x_k)}] + f'(x_k) \frac{\phi(x)}{\phi(x_k)} (x - x_k). \quad (9)$$

En el límite cuando \mathcal{E} tiende a cero se ha obtenido una interpolación que no sólo es adecuada para $f(x_k)$ sino también para $f'(x_k)$ en el punto crítico x_k . Al mismo tiempo el factor $x - x_k$ del polinomio fundamental aparece elevado al cuadrado ya que $x_a \rightarrow x_k$ y $x_\beta \rightarrow x_k$; el punto $x = x_k$ se ha convertido en un punto doble. Si todos los puntos se hacen puntos dobles, satisfaremos en cada punto x_i el valor de $f(x_i)$ y su derivada $f'(x_i)$ correctamente: Esto es, el polinomio interpolante de orden $2n - 1$ obtenido al hacer todos los puntos en dobles coincide $f(x)$ con $x = x_i$ en , y además su derivada coincide con $f'(x)$ en $x = x_i$. Así el polinomio fundamental se convierte en:

$$F_n(x) = [(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)]^2, \quad (10)$$

el cual permanece positivo en todo el dominio en vez de cambiar de signo de punto en punto. Una forma conveniente de expresar 9 es por medio de las derivadas de $F(x)$:

$$F_n(x) = \phi(x)(x - x_k)^2,$$

$$F'_n(x) = 2\phi(x)(x - x_k) + (x - x_k)^2\phi'(x),$$

$$F''_n(x) = 2\phi(x) + 4(x - x_k)\phi'(x) + (x - x_k)^2\phi''(x),$$

$$F'''_n(x) = 6\phi'(x) + 6(x - x_k)\phi''(x) + (x - x_k)^2\phi'''(x), \quad (11)$$

que al evaluarse en $x = x_k$ producen:

$$F_n(x_k) = 0, \quad F'_n(x_k) = 0,$$

$$F''_n(x_k) = 2\phi(x_k), \quad F'''_n(x_k) = 6\phi'(x_k), \quad (12)$$

por lo tanto el polinomio interpolante se escribe como:

$$Pol_{2n-1} = \sum_{k=1}^n \frac{2F(x)}{F''(x_k)} \left[1 - \frac{1}{3} \frac{F'''(x_k)}{F''(x_k)} (x - x_k) \right] \frac{f(x_k)}{(x - x_k)^2} + \frac{2F(x)}{F''(x_k)x - x_k}, \quad (13)$$

4. El método de la cuadratura Gaussiana

Consideremos la función $f(x)$ que es la integral indefinida de una función dada $g(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g(x), \\ f(x) &= \int g(x)dx + C. \end{aligned} \quad (14)$$

En este problema están dados los valores $g(x_k)$ que corresponden a $f'(x_k)$, necesarios para una interpolación con puntos dobles, sin embargo, no conocemos los valores de $f(x_k)$ necesarios para efectuarla. Podemos superar esto al colocar los puntos x_k en posiciones tales que sus pesos automáticamente se hagan cero, de forma tal que la interpolación contenga sólo datos conocidos. Supongamos que deseamos evaluar la integral definida:

$$A = \int_{-1}^1 g(x)dx = f(1) - f(-1), \quad (15)$$

como $f(x)$ tiene una constante de integración libre podemos definir:

$$f(-1) = 0, \quad (16)$$

y considerar esta condición como un dato adicional a los datos x_k ya dados. Esto significa que el polinomio fundamental $F_n(x)$ es ahora de orden $2n + 1$ porque hemos añadido un punto simple, $x = -1$ a los n puntos dobles x_k . El punto $x = -1$ es un punto simple ya que no tenemos razón para suponer que $f'(x)$ deba conocerse en este punto, por lo tanto:

$$F_n(x) = (x + 1)[(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)]^2. \quad (17)$$

Ahora, el factor de $f(x)$ que se hace cero demanda la siguiente condición:

$$1 - \frac{1}{3} \frac{F_n'''(x_k)}{F_n''(x_k)} (x - x_k) = 0, \quad (18)$$

la cual no podemos satisfacer simultáneamente para varios valores de x , pero nuestro objetivo es obtener $f(1)$, y de esta manera podemos identificar el valor de x con $x = 1$. Sea la siguiente función:

$$G(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n), \quad (19)$$

por lo tanto, la condición 18 se reduce a:

$$1 - \left[\frac{1}{1 + x_k} + \frac{G''(x_k)}{G'(x_k)} \right] (x - x_k) = 0, \quad (20)$$

y su evaluación en $x = 1$ demanda que:

$$\left[(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + n(n + 1) \right] G(x) \Big|_{x=x_k} = 0, \quad (21)$$

como $G(x_k) = 0$ podemos sumarlo a 21 sin alterar la igualdad a cero. La ecuación diferencial de Legendre 21, debe cumplirse para $G(x)$ no sólo en los puntos x_k sino en cualquier lugar. Esto hace a $G(x)$ proporcional al polinomio de Legendre de n -ésimo orden $P_n(x)$:

$$G(x) = c_n P_n(x), \quad c_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} 2^n. \tag{22}$$

Por lo tanto, los ceros de la cuadratura Gaussiana son de esta forma identificados con los ceros del n -ésimo polinomio de Legendre. Finalmente, el problema de la cuadratura Gaussiana queda expresado por:

$$A = \sum_{k=1}^n \omega_k g(x_k), \tag{23}$$

donde los pesos de la cuadratura están dados por:

$$\omega_k = \frac{2(1-x_k^2)}{(n+1)^2 [P_{n+1}(x_k)]^2}. \tag{24}$$

El error producido en la cuadratura se calcula de acuerdo al término del residuo de la interpolación lagrangiana:

$$\eta_n = 2^{2n+1} \frac{(n!)^4}{(2n!)^2} \frac{g^{(2n)}(\bar{x})}{(2n+1)!}. \tag{25}$$

Para realizar la cuadratura en un intervalo $[a, b]$:

$$A = \int_a^b f(x) dx, \tag{26}$$

se utiliza el siguiente mapeo de coordenadas, como se muestra en la Fig. 1:

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \xi, \quad \xi \in [-1, 1]. \tag{27}$$

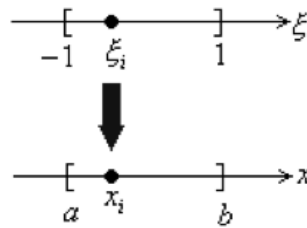


Figura 1: Mapeo de coordenadas del eje ξ al eje x .

Al aplicar la cuadratura Gaussiana resulta:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^N \omega_i f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \xi_i\right), \tag{28}$$

donde N es el número de raíces, ω_i son los pesos correspondiente y ξ_i son las raíces del polinomio de Legendre de N -ésimo orden.

5. Segmentación no equidistante en el método de momentos

El hecho de que una integración pueda implementarse como una cuadratura Gaussiana motiva naturalmente a realizar la segmentación no equidistante de una antena de alambre delgado de geometría arbitraria. Existen al menos dos maneras interesantes de colocar las raíces en un segmento de la antena: en sus extremos o en el centro. Cuando éstas se colocan en los extremos, se obtiene un segmento extra al número de raíces usadas, mientras que al ubicarlas en el centro del segmento, el número de éstos corresponde al número de raíces. Ambos métodos han sido estudiados por nosotros y puede decirse con certeza que colocar la raíz en el centro produce los mejores resultados y obviamente es la manera más natural de dividir la antena, como se muestra en la Fig. 2.

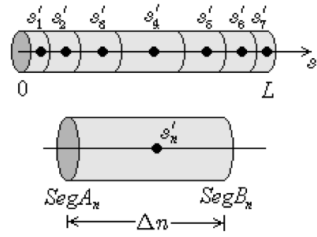


Figura 2: Segmentación no equidistante, colocando las raíces en el centro de cada segmento.

En una antena de geometría arbitraria, Fig. 3, cuyo eje y filamento equivalente de corriente se describen por $\mathbf{r}(s)$ y $\mathbf{r}'(s')$, respectivamente, el campo eléctrico tangencial E_s^i está expresado por medio de la ecuación de Pocklington [4]:

$$E_s^i = -\frac{1}{j\omega\mathcal{E}} \int [R^2(k^2R^2 - 1 - jkR)\hat{\mathbf{s}} \bullet \hat{\mathbf{s}}' + (3 + 3jkR - k^2R^2)(\mathbf{R} \bullet \hat{\mathbf{s}})(\mathbf{R} \bullet \hat{\mathbf{s}}')] \frac{e^{-jkR}}{4\pi R^5} I(s') ds', \quad (29)$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ es el vector diferencia entre un punto en el eje y otro en el filamento equivalente de corriente $I(s')$, $\hat{\mathbf{s}}$ y $\hat{\mathbf{s}}'$ son los vectores tangentes unitarios a las curvas \mathbf{r} y \mathbf{r}' , k es el número de onda, ω es la frecuencia angular de la corriente y ξ es la permitividad eléctrica del medio que rodea al alambre.

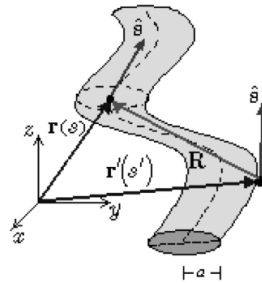


Figura 3: Antena de alambre delgado de geometría arbitraria.

En forma más compacta, la ecuación 29 quedaría escrita como:

$$E_s^i = -\frac{1}{j\omega\mathcal{E}} \int_{s'} K(s, s') I(s') ds', \quad (30)$$

donde $K(s, s')$ es el kernel de la integral curvilínea [5]. Si tanto \mathbf{r} como \mathbf{r}' están parametrizados de acuerdo a su longitud de arco, entonces la integral 30 puede escribirse como una integral definida cuyos límites son el origen y su longitud total L :

$$E_s^i = -\frac{1}{j\omega\mathcal{E}} \int_{s'}^L K(s, s') I(s') ds', \quad (31)$$

Según el método de momentos [6], la corriente se expresa como una combinación lineal de N funciones base $i_n(s')$ propuestas:

$$I(s') = \sum_{n=1}^N c_n i_n(s'), \quad (32)$$

cuyo dominio de i_n corresponde a un subdominio de $[0, L]$. Por lo tanto, el campo eléctrico se expresa como [7]:

$$E_s^i = \frac{-1}{j\omega\mathcal{E}} \sum_{n=1}^N c_n \int_{\Delta_n} i_n(s') K(s, s') ds', \quad \Delta_n \subset [0, L], \quad (33)$$

donde Δ_n es el dominio de i_n . Para obtener el sistema de ecuaciones que permita determinar todos los coeficientes c_n , se realiza el producto interno con el conjunto de N funciones peso \mathcal{W}_m :

$$\int_{\Delta_m} \mathcal{W}_m E_s^i ds = -\frac{1}{j\omega\mathcal{E}} \sum_{n=1}^N c_n \int_{\Delta_m} w_m \int_{\Delta_m} i_n(s') K(s, s') ds' ds, \quad \Delta_m \subset [0, L], \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (34)$$

donde Δ_m es el dominio de \mathcal{W}_m . Al aplicar la cuadratura de Gauss a la integral más externa se tiene:

$$\int_{\Delta_m} \mathcal{W}_m E_s^i ds = -\frac{1}{j\omega\mathcal{E}} \sum_{n=1}^N c_n \frac{\Delta_m}{2} \sum_{i=1}^M \omega_i w_m(s_i) \int_{\Delta_m} i_n(s') K(s_i, s') ds', \quad (35)$$

donde M es el número de raíces de Legendre usadas para efectuar la integración, s_i son las raíces mapeadas en D_m y ω_i son los pesos correspondientes. Al efectuar en forma semejante la cuadratura de la integral interna se tiene:

$$\int_{\Delta_m} \mathcal{W}_m E_s^i ds = -\frac{1}{j\omega\mathcal{E}} \sum_{n=1}^N c_n \frac{\Delta_m \Delta_n}{4} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^J \omega_i v_j w_m(s_i) i_n(s'_j) K(s_i, s'_j), \quad (36)$$

donde J es el número de raíces usadas para efectuar la cuadratura, s son las raíces mapeadas en D_n y v_j son los pesos correspondientes. El sistema de ecuaciones 36 puede escribirse en forma matricial como:

$$V_m = Z_{mn} C_n, \quad (37)$$

donde (V_m) es el vector columna de voltajes. Cuando a la antena se le conecta un generador delta-gap con fasor de voltaje V en el m -ésimo segmento, esta matriz toma la forma:

$$V_m = \begin{pmatrix} \int_{\Delta_1} w_1 \mathcal{E}_s^i ds \\ \int_{\Delta_2} w_2 \mathcal{E}_s^i ds \\ \vdots \\ \int_{\Delta_N} w_N \mathcal{E}_s^i ds \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{V}{\Delta_m} \int_{\Delta_m} w_m ds \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \quad (38)$$

Los elementos de la matriz de impedancia $[Z_{mn}]$ tienen la estructura:

$$Z_{mn} = -\frac{\Delta_m \Delta_n}{4j\omega \mathcal{E}} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^J \omega_i v_j w_m(s_i) i_n(s'_j) K(s_i, s'_j), \quad (39)$$

y los elementos de la matriz de corriente se calculan al tomar la inversa de la matriz de impedancias:

$$C_n = V_m Z_{mn}^{-1} \quad (40)$$

Los valores de corriente calculados corresponden a los centros de los segmentos colocados no equidistantemente. Para una gráfica de la distribución de corriente se necesitan Q valores equidistantes de corriente, los cuales se obtienen por un proceso de interpolación con puntos sencillos:

$$\hat{I}q\Delta s' = \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^N c_n i_n s'_i \frac{\varphi_i q \Delta s'}{\varphi_i s'_i}, \quad q = 1, 2, \dots, Q, \quad \Delta s' = \frac{L}{Q}, \quad (41)$$

donde $1\%(q\Delta s')$ es el polinomio interpolante de la corriente evaluado en el q -ésimo punto equidistante de la antena, y la función auxiliar j_i se define como:

$$\varphi_i s' = \frac{F_n s'}{s' - s'_i} = \prod_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^N s' - s'_j \quad (42)$$

6. Resultados

El método descrito anteriormente fue aplicado a una antena dipolo de media longitud de onda, donde se usaron funciones pulso como funciones base y funciones peso, con lo cual se obtiene una representación en escalera de la corriente en el alambre. En la Fig. 4, se muestra la comparación del método no equidistante con el equidistante, donde puede verse la gran similitud de los resultados. En la gráfica equidistante se usaron 35 segmentos, mientras que en la no equidistante se usaron 29 segmentos interpolados en 35 datos. El hecho de que se usen menos segmentos que en el caso equidistante ya muestra una ganancia en el método propuesto.

En la Fig. 5 se muestran los resultados obtenidos de tres antenas dipolo de media longitud de onda, cada una con diferente diámetro, con lo que se demuestra que las variaciones del radio del conductor están consideradas en el modelo del alambre delgado. En los casos donde la antena es más delgada, los resultados se comportan de acuerdo a lo previsto por Hällén, es decir, que el comportamiento de la corriente tiende a ser completamente senoidal; en cambio, en las antena más gruesa, el comportamiento senoidal puede considerarse como aproximado, ya que en el lugar donde se conecta el generador de la antena, aparece una pequeña concavidad en la gráfica de la corriente.

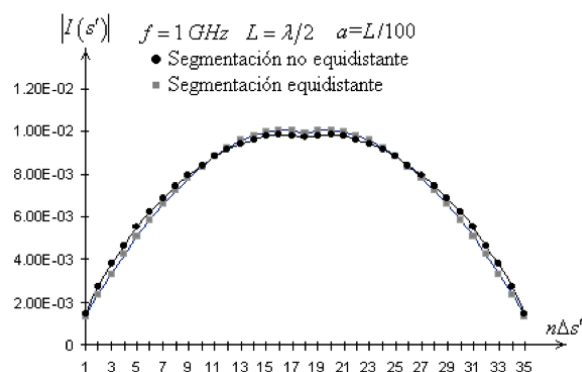


Figura 4: Comparación de resultados obtenidos con segmentaciones equidistantes y no equidistantes.

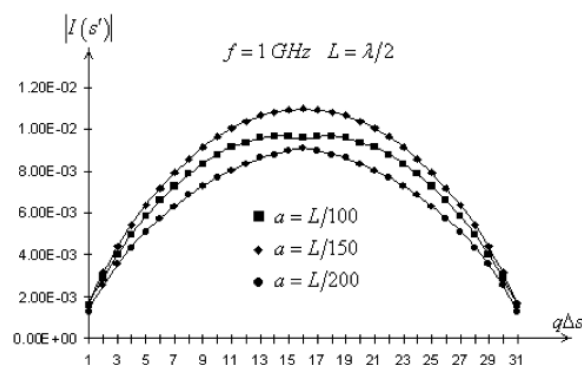


Figura 5: Distribuciones de corriente obtenidas para 3 antenas con diferentes diámetros cada una.

7. Conclusiones

Se puede concluir que el método no equidistante propuesto en este trabajo permite obtener una representación polinomial de la distribución de corriente, la cual al ser interpolada en puntos equidistantes sobre la antena, produce resultados correctos, comparables con el método equidistante, sin la aparición del fenómeno de Runge-Borel.

La segmentación no equidistante permite reducir el tiempo de máquina ya que se tiende a utilizar menos segmentos que en el caso equidistante. Si se hace la comparación de tiempos, sin tomar en cuenta el necesitado para determinar las raíces de los polinomios de Legendre, puede concluirse que el método no equidistante consume menos tiempo de cálculo que el método equidistante.

El uso de las raíces de los polinomios de Legendre permite calcular el campo electromagnético de la antena por medio de una simple cuadratura Gaussiana, en la cual se garantiza que tiene el menor error posible, respecto a otras cuadraturas usadas para calcular las integrales del campo.

Referencias

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Wiley and Sons, NY, 1972.
- [2] C. Lanczos, *Applied Analysis*, Dover, NY, 1988.
- [3] C. Lanczos, *Linear differential operators*, Dover, NY, 1997.
- [4] J. Sosa-Pedroza, V. Barrera-Figueroa, J. López-Bonilla, "La ecuación generalizada de Pocklington para antenas de alambre de forma arbitraria", en Científica-ESIME-IPN, vol. 9, No. 2, 2005, pp. 83-86.

- [5] J. Sosa-Pedroza, V. Barrera-Figueroa, J. López-Bonilla, “Simplification of Pocklington equation kernel for arbitrary shaped thin wires”, in Rev. Cub. Fís, vol. 21 No. 1, 2004, pp. 21-28.
- [6] J. Sosa-Pedroza, V. Barrera-Figueroa, J. López-Bonilla, “Pocklington equation and the method of moments”, in Proc. Pakistan Acad. Sci. vol. 42, No. 4, 2005, pp. 243-248.
- [7] J. Sosa-Pedroza, V. Barrera-Figueroa, J. López-Bonilla, “Pocklington equation method versus curved segments technique for the numerical study of circular antennas”, in Apeiron vol. 13, No. 2, 2006, pp. 260-273.

