Journal de Ciencia e Ingeniería, vol.13, no. 2, pp.53-54, 2021
http://jci.uniautonoma.edu.co
DOI: https://doi.org/10.46571/JCI.2021.2.4

Corporación Universitaria Autónoma del Cauca
ISSN 2145-2628, e-ISSN 2539-066X
Matemáticas - Articulo Corto

Codificación de parejas ordenadas de números como números individuales

Encoding of ordered pairs of numbers as individual numbers

J. López-Bonilla[1], M. Morales-García
ESIME-Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, Edif. 4, 1er. Piso, Col. Lindavista, C.P. 07738, CDMX, México

Resumen. Penrose indica una manera de asociar un entero no-negativo M a cada pareja ordenada (m, n) de enteros no-negativos, pero él no muestra un algoritmo para el proceso inverso, es decir, construir el par (m, n) correspondiente a un M dado.

Palabras Clave. Codificación de parejas ordenadas de enteros

Abstract. Penrose indicates a manner to associate a non-negative integer M to each ordered pair (m, n) of non-negative integers, however, he does not exhibit an algorithm for the inverse process, that is, to construct the pair (m, n) if we know the integer M.

Keywords. Encoding of ordered pairs of numbers.

Como citar. J. López-Bonilla y M. Morales-García, "Codificación de parejas ordenadas de números como números individuales", *Jou. Cie. Ing.*, vol. 13, no. 2, pp. 53-54, 2021. doi:10.46571/JCI.2021.2.4

Recibido: 13/09/2021 **Revisado:** 25/11/2021 **Aceptado:** 16/12/2021

Sean $m, n = 0, 1, 2, \ldots$ elementos de la pareja ordenada (m, n) a la cual puede asociársele, de manera unívoca, el entero M tal que [1] :

$$(m, n)- > M = \frac{1}{2}[(m+n)^2 + 3m + n] = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

por ejemplo

$$\begin{array}{lllll} (0,0) \to 0, & (0,1) \to 1, & (0,2) \to 3, & (1,0) \to 2, & (1,1) \to 4, \\ (1,2) \to 7, & (2,0) \to 5, & (2,1) \to 8, & (2,2) \to 12, & (3,0) \to 9, \\ (3,1) \to 13, & (3,1) \to 13, & etc, & & \end{array} \tag{2}$$

Entre otros usos, la codificación (1) puede emplearse [1] para probar que el conjunto de fracciones es numerable. Penrose no expone cómo realizar la correspondiente asociación inversa:

$$M \to (m, n), \tag{3}$$

[1] *Corresponding author: jlopezb@ipn.mx*

donde M, m y n son enteros no-negativos; es decir, implementar un proceso para encontrar el par (m, n) asociado a un M dado. Aquí se exhibe, sin demostración, un procedimiento para efectuar el mapeo (3), en efecto:

(i) Se conoce $M = 0, 1, 2, \ldots$

(ii) Se consideran los enteros N tales que:

$$M \leqq N \leqq \frac{1}{2}\left(2m - 1 + \sqrt{8m+1}\right) \tag{4}$$

(iii) De estos posibles valores para N se elige aquél que convierte a $(8N + 9)$ en un cuadrado perfecto:

$$E^2 = 8N + 9, \qquad E = 3, 5, 7, 9, ..., \qquad E \leqq 2 + \sqrt{8M+1}. \tag{5}$$

(iv) Con estos valores de E y N puede obtenerse el par asociado a M:

$$m = \frac{1}{2}(E - 3) + M - N, \qquad n = N - M. \tag{6}$$

Enseguida se realizan dos ejemplos para mostrar la aplicación de este procedimiento:

1.- Sea $M = 16$. Entonces de (4) resulta que $16 \leqq N \leqq 21$, y para estos posibles valores de N se calcula $(8N + 9)$:

$$\begin{array}{cccccc} N = 16, & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 8N + 9 = 139 & 145 & 153 & 461 & 169 & 177 \end{array} \tag{7}$$

y es inmediato que (5) se satisface para $E = 13$, por lo tanto $N = 20$, y de (6) resultan las cantidades $m = 1$, $n = 4$, así (3) implica:

$$16 \longrightarrow (1, 4) \tag{8}$$

2.- Considérese $M = 8$. De (4) se tiene que $8 \leqq N \leqq 11$, entonces los posibles valores de N permiten obtener la siguiente Tabla:

$$\begin{array}{cccc} N = 8, & 9 & 10 & 11 \\ 8N + 9 = 73 & 81 & 89 & 97 \end{array} \tag{9}$$

así $E = 9$ verifica (5) con $N = 9$, por lo tanto (6) implica que $m = 2, n = 1$:

$$8 \longrightarrow (2, 1) \tag{10}$$

en acuerdo con (2).

Las expresiones (4), (5) y (6) señalan un camino directo para determinar el par (m, n) correspondiente a un M dado, y complementan la asociación (1) de Penrose [1].

Referencias

[1] R. Penrose, *The Emperor's New Mind.* Oxford University Press, 1989, Chap. 2.