Journal de Ciencia e Ingeniería, vol.15, no.2, pp. 24-32, 2023
http://jci.uniautonoma.edu.co
DOI: https://doi.org/10.46571/JCI.2023.2.3
Journal de Ciencia e Ingeniería
Corporación Universitaria Autónoma del Cauca
ISSN 2145-2628, e-ISSN 2539-066X
Mecánica Cuántica

Una simulación matemática del efecto Zeeman de un campo magnético

A mathematical simulation for the Zeeman effect of a magnetic field

J.D. Bulnes[+1] **M. Cavalcante**[++2] **M.A.I. Travassos**[*3] **y J. López-Bonilla**[**4]
[+]**Dep. Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 68903-419, AP, Brasil**
[++]**Curso de Especialização em Física, Dep. Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 68903-419, AP, Brasil**
[*]**Dep. Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 68903-419, AP, Brasil**
[**]**ESIME-Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, CDMX, México**

Resumen. En este artículo se presenta una simulación matemática de la versión más simple del efecto Zeeman de un campo magnético. En esta simulación, se adopta un tratamiento matricial de un problema inverso. El problema consiste en determinar una matriz a partir de un conjunto de números que, por imposición, serán los valores propios de dicha matriz. Partiendo de una matriz que presenta máxima degeneración de sus valores propios, se consideran tres simulaciones: una preservando la degeneración inicial; una rompiendo parcialmente esta degeneración, y la otra rompiendo totalmente la degeneración inicial. Se presentan consideraciones físicas que podrían corresponder a estas simulaciones.

Palabras Claves. Simulación matemática; Efecto Zeeman de un campo magnético; Problema inverso; Problema de valores propios.

Abstract. In this paper, a mathematical simulation for the simplest version of the Zeeman Effect of a magnetic field is presented. In this simulation, a matrix treatment of an inverse problem is adopted. The problem that we will address focuses on determining a matrix from a set of numbers, which, by imposition, will be the eigenvalues of this matrix. Starting from a matrix that presents maximum degeneracy of its eigenvalues, three simulations are considered: one preserving the initial degeneracy, one partially breaking this degeneration, and the other totally breaking the initial degeneracy. Physical considerations that could correspond to these simulations are presented.

Keywords. Mathematical simulation; Zeeman effect of a magnetic field; Inverse problem; Eigenvalue

[1] *e-mail: bulnes@unifap.br*
[2] *e-mail: cavalcante1001@hotmail.com*
[3] *e-mail: angelicaptravass@gmail.com*
[4] *e-mail: jlopezb@ipn.mx*

problem.

Como citar. J.D. Bulnes, SM. Cavalcante, M.A.I. Travassos y J. López-Bonilla, Una simulación matemética del efecto Zeeman de un campo magnético. *Jou. Cie. Ing.*, vol. 15, no. 2, pp. 24-32, 2023. doi:10.46571/JCI.2023.2.3

Recibido: 23/09/2023 **Revisado:** 18/11/2023 **Aceptado:** 10/11/2023

1. Introducción

Los esfuerzos que llevaron al descubrimiento del efecto Zeeman de un campo magnético fueron iniciados por Michael Fadaray hace 160 años [1, 2], cuando fueron diseñados experimentos para medir cambios detectables en las líneas espectrales de la luz producida por una sustancia, como el sodio, al ser colocada en la llama de un quemador, cuando se aplica un campo magnético externo. A pesar de la gran experiencia y la excepcional pericia de Faraday en el campo experimental, este descubrimiento sólo fue posible para Pieter Zeeman [3, 4].

El primer físico en modelar el efecto Zeeman de un campo magnético de acuerdo con el contexto cuántico, para el átomo de hidrógeno, fue el Prof. Arnold Sommerfeld, quien consideró un campo magnético homogéneo[5]. Ese efecto puede entenderse a partir de la *ruptura parcial* de la degeneración que presentan los niveles del espectro energético accesible a los electrones (en los átomos de la sustancia considerada) por la acción de un campo magnético externo. Esa ruptura equivale al desdoblamiento de los niveles energéticos (antes degenerados) en varios otros niveles y a las subsecuentes transiciones electrónicas permitidas entre estos niveles y los niveles previamente existentes, explicándose (cualitativa y esencialmentemente) así el cambio en las líneas espectrales de una sustancia. Esa situación de ruptura parcial de la degeneración total de un espectro energético es la que sirve de base para la *simulación matemática* del efecto Zeeman que consideramos en las siguientes secciones.

El término *simulación* se encuentra frecuentemente ligado al contexto numérico y computacional, lo que comenzó con el denominado problema de Fermi-Pasta-Ulam, en 1953 [7]. Extensiones de este término incluyen *simulación física* [8] y *simulación matemática.* Aclaramos que por *simulación matemática* entendemos el desarrollo que culmina con un resultado matemático que reproduce o pone en evidencia el aspecto más esencial en un determinado *efecto* físico, sin haber modelado la *causa* física correspondiente, ni considerado el contexto ni el formalismo físicos oficiales. Precisamente por ello, no consideraremos la estructura formal de la mecánica cuántica del efecto Zeeman para la construcción de nuestra simulación; simplemente, consideraremos, de partida, una situación que presenta una degeneración de los autovalores de una matriz.

Puede resultar noticioso mencionar que una de las aplicaciones más importantes del efecto Zeeman fue el descubrimiento, por G. Hale, en 1908, de que existen campos magnéticos actuando en las llamadas “manchas solares”, lo que se comprobó a través de la técnica de espectro-polarimetría [9].

1.1. Definición de un problema inverso en álgebra matricial

En física y matemática, pero también en ingeniería y geofísica, los llamados problemas inversos son muy importantes. Consideremos el siguiente problema: Dados N números, $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N\}$, e N vetores, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_N\}$, determine bajo qué condiciones es posible construir una matriz (de orden N) que tenga estos conjuntos como sus correspondientes valores propios y vectores propios. Este problema constituye lo que se puede llamar un *problema inverso* del conocido

[5] En el caso de aplicar un campo magnético no homogéneo, se esperaría observar, además, el desplazamiento de todos los niveles de energía, ahora desdoblados, por efecto del gradiente del campo magnético, como ocurre con los niveles de energía del Hamiltoniano de Stern-Gerlach [5, 6].

problema (directo) que consiste en calcular los valores propios y vectores propios de una matriz conocida[6].

Un caso particular del problema inverso anterior, de interés para la simulación matemática a considerar, consiste en separar en subconjuntos el espectro de valores propios a asignar a la matriz, presentando cada subconjunto un grado específico de degeneración. Podríamos considerar, por ejemplo, una matriz indefinida B de orden seis y la siguiente asignación: tres valores propios degenerados, con valor propio λ_3, dos valores propios degenerados, con valor propio λ_2, distintos de λ_3, y un valor propio no degenerado λ_1, distinto de los valores propios anteriores. La ruptura parcial de estas degeneraciones se produciría mediante la adición (a la matriz B) de una segunda matriz, simulando así matemáticamente el aspecto esencial del efecto Zeeman. Sin embargo, por simplicidad, dado que no utilizaremos recursos computacionales, consideraremos en la siguiente sección solo un conjunto con tres valores propios degenerados, para lo cual trabajaremos con una matriz de orden 3.

2. Desenvolvimiento

Aquí resolvemos el *problema inverso* consistente en determinar una matriz B, de orden 3, a partir de três números repetidos ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$) que, por *imposición*, serán los valores propios de esta matriz. Una solución cualquiera a este problema permitirá simular un sistema cuántico que presenta una degeneración triple en sus valores propios. Añadiendo una matriz adecuada a esta matriz se simula la situación de preservación (o ruptura parcial, o ruptura total) de la simetría ligada a la degeneración inicial. En los casos de *ruptura parcial* de la degeneración inicial, y *ruptura total* de esta degeneración (asumiendo que esta ruptura no afecta otras degeneraciones presentes en el espectro total de valores propios) estaremos simulando matemáticamente el aspecto fundamental del efecto Zeeman de un campo magnético. Veamos esto a continuación.

Sea B una matriz cuadrada *indefinida* que, por simplicidad, tendrá orden $N = 3$, como se muestra a continuación,

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ s & t & u \end{pmatrix}, \tag{1}$$

donde los números $a, b, ...$ son desconocidos. Entonces, dado que se requiere que λ sea el valor propio de B, escribimos,

$$(B - \lambda I)\vec{X} = \vec{0}, \tag{2}$$

solo que, a diferencia del correspondiente problema directo, la expresión (2) es una ecuación para B, y no para λ (conocida, por imposición), ni para $\vec{X}$ (desconocido e irrelevante). Requeriremos, como en el caso del problema directo, que los valores propios estén asociados a vectores propios no triviales. Por lo tanto, debemos imponer que,

$$\det\,(B - \lambda I) = 0. \tag{3}$$

Escribiendo explícitamente la expresión (3) tenemos,

$$(a-\lambda)(q-\lambda)(u-\lambda) - sc(q-\lambda) - rt(a-\lambda) - pb(u-\lambda) + brs + cpt = 0 \tag{4}$$

Tenga en cuenta que, si inicialmente hay *nueve* parámetros libres y una ecuación para ellos, permanecerán *ocho* parámetros *independientes*. Es importante señalar que el problema aquí definido no tiene solución única, ya que, como vemos directamente en (4), existen *infinitas*

[6] En la literatura se han considerado varios problemas inversos, por ejemplo [10–18].

posibilidades para asignar valores a los parámetros libres.
Aprovechando la libertad disponible, impondremos que,

$$u = \lambda, \tag{5}$$

de modo que (4) se reduce a,

$$-sc(q-\lambda) - rt(a-\lambda) + brs + cpt = 0 \tag{6}$$

y quedan *siete* parámetros independientes. También impondremos que,

$$q = \lambda, \tag{7}$$

y hasta el momento tenemos *seis* parámetros libres, quedando la expresión,

$$-rt(a-\lambda) + brs + cpt = 0\ , \qquad \text{ó} \qquad -t\Big(r(a-\lambda) - cp\Big) + brs = 0 \tag{8}$$

Continuemos. Ahora, imponemos que,

$$b = t, \tag{9}$$

restando *cinco* parâmetros independentes. También imponemos,

$$rs = r(a-\lambda) - cp \qquad \text{ou} \qquad r(s-a+\lambda) = -cp \tag{10}$$

de donde se puede exigir que,

$$c = s - a + \lambda, \tag{11}$$

Así, de (10) y (11), deve cumplirse, en consecuencia, que,

$$r = -p \tag{12}$$

restando *cuatro* parámetros libres. Para continuar, vamos exigir que,

$$a = s + \lambda, \tag{13}$$

de esta manera, de (13) y (11), tenemos que $c = 0$, sobrando *tres* parámetros independentes. Hasta ahora, dado λ, que se impone libremente desde el inicio, tenemos, de acuerdo con nuestra asignación de valores, que los parámetros libres son: p, t, s; de esta manera nos queda la matriz,

$$\begin{pmatrix} s+\lambda & t & 0 \\ p & \lambda & -p \\ s & t & \lambda \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Adicionalmente, elegimos $s = 0$, de modo que nos quedan t y p como los únicos parámetros independientes, y nuestra matriz se escribe como,

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & t & 0 \\ p & \lambda & -p \\ 0 & t & \lambda \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Un ejemplo numérico de una matriz del tipo (15), con $\lambda = 3$, $t = 1$, $p = 5$, es el seguiente,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

Es sencillo verificar, resolviendo el correspondiente problema directo, que los valores propios de B_1 son todos iguales a $\lambda = 3$.

3. Simulando matemáticamente el efecto Zeeman

Hasta ahora, tenemos una matriz de un tipo particular, dada en (15), que fue construida de tal manera que todos sus valores propios son iguales. Para construir una simulación matemática del efecto Zeeman de un campo magnético es necesario establecer el contexto correspondiente; para hacer esto, agregaremos una segunda matriz a la matriz B, por separado, en cada uno de los siguientes casos:
(i) Una matriz C, tal que $B+C$ *preserva* el grado de degeneración de la matriz inicial (preservar el valor del autovalor degenerado no es importante).
(ii) Una matriz T, tal que $B+T$ *rompe parcialmente* la degeneración de la matriz inicial.
(iii) Una matriz L, tal que $B+L$ *rompe completamente* la degeneración de la matriz inicial.

3.1. Caso (i)

Agreguemos a la matriz B, en (15), una matriz C, que se definirá aprovechando el resultado encontrado en la subsección anterior. Entonces escribimos,

$$C = \begin{pmatrix} \beta & q & 0 \\ h & \beta & -h \\ 0 & q & \beta \end{pmatrix}, \tag{16}$$

siendo β, q y h parámetros libres. Entonces, la matriz suma,

$$B + C = \begin{pmatrix} \lambda+\beta & t+q & 0 \\ p+h & \lambda+\beta & -p-h \\ 0 & t+q & \lambda+\beta \end{pmatrix}, \tag{17}$$

conserva la triple degeneración (o multiplicidad) inicial, pero con valores propios todos iguales a: $\lambda + \beta$.

Con las matrices genéricas en (15) y en (16) podemos *simular* una situación física en la que existe una *simetría geometría* en un determinado sistema físico, que es preservada por la acción de un campo físico externo que presenta la misma simetría. Esa simetría podría estar asociada, en un sistema físico real, con el potencial de Coulomb generado por los protones de un átomo (que, por exemplo, tiene espín electrónico total nulo). Esa simetría da lugar a la *degeneración* de los valores propios del hamiltoniano cuántico del sistema físico. Un ejemplo de sistema físico correspondiente a una situación con preservación de la degeneración inicial de sus valores proprios de energía consiste en colocar un átomo en el centro de una esfera conductora mantenida a un potencial constante, a través de una fuente adecuada[7].

Veamos un ejemplo numérico. Consideremos los valores: $\lambda = 3$, $t = 1$, $p = 5$, $\beta = 4$, $q = 3$, $h = -1$. Entonces tenemos,

$$B_1 + C_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 4 & 7 & -4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

que preserva el grado de degeneración de los valores propios de la matriz B_1, como se puede comprobar directamente.

[7] Esto, en el caso en que la simetría más importante del sistema físico sea una simetría geométrica (esférica).

3.2. O caso (ii)
Escrevemos diretamente a matriz soma, $B+T$, como segue,

$$B+T=\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} \\ \tilde{p} & \tilde{q} & \tilde{r} \\ \tilde{s} & \tilde{t} & \tilde{u} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

formada por nove elementos (parâmetos *inicialmente* independentes). Como antes, exigê-se que,

$$\det\,(B+T-\lambda I)=0. \tag{20}$$

Recuerde que la matriz B es conocida (fue construida en la sección 2) y que los valores propios λ pueden elegirse de antemano, de modo que a partir de la expresión (19) y la imposición de exigencias específicos hay que determinar la matriz $B+T$; y, posteriormente, la matriz T.

La expresión (20) puede ser reescrita, equivalentemente, como:

$$(\tilde{a}-\lambda)(\tilde{q}-\lambda)(\tilde{u}-\lambda)-\tilde{s}\tilde{c}(\tilde{q}-\lambda)-\tilde{r}\tilde{t}(\tilde{a}-\lambda)-\tilde{p}\tilde{b}(\tilde{u}-\lambda)+\tilde{b}\tilde{r}\tilde{s}+\tilde{c}\tilde{p}\tilde{t}=0 \tag{21}$$

o también en la forma,

$$\begin{aligned}\lambda^3-\Big(\tilde{a}+\tilde{q}+\tilde{u}\Big)\lambda^2+\Big(\tilde{a}\tilde{u}+\tilde{q}\tilde{u}+\tilde{a}\tilde{q}-\tilde{s}\tilde{c}-\tilde{t}\tilde{r}-\tilde{p}\tilde{b}\Big)\lambda\,+&\\ +\Big(\tilde{s}\tilde{c}\tilde{q}+\tilde{t}\tilde{r}\tilde{a}+\tilde{p}\tilde{b}\tilde{u}-\tilde{a}\tilde{q}\tilde{u}-\tilde{b}\tilde{r}\tilde{s}-\tilde{c}\tilde{p}\tilde{t}\Big)\;=\;0,&\end{aligned} \tag{22}$$

Por otro lado, dado que denotamos por λ_1, λ_2 y λ_3 los valores propios que asignaremos a la matriz $B+T$, se debe cumplir que,

$$\Big(\lambda-\lambda_1\Big)\Big(\lambda-\lambda_2\Big)\Big(\lambda-\lambda_3\Big)=0, \tag{23}$$

o también,

$$\lambda^3-\Big(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\Big)\lambda^2+\Big(\lambda_1\,\lambda_2+\lambda_1\,\lambda_3+\lambda_2\,\lambda_3\Big)\lambda-\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3=0, \tag{24}$$

Luego, al comparar los coeficientes de igual potencia en (21) y (3.9), tenemos las siguientes relaciones,

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\tilde{a}+\tilde{q}+\tilde{u}, \tag{25}$$

$$\lambda_1\,\lambda_2+\lambda_1\,\lambda_3+\lambda_2\,\lambda_3=\tilde{a}\tilde{u}+\tilde{q}\tilde{u}+\tilde{a}\tilde{q}-\tilde{s}\tilde{c}-\tilde{t}\tilde{r}-\tilde{p}\tilde{b}, \tag{26}$$

$$-\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3=\tilde{s}\tilde{c}\tilde{q}+\tilde{t}\tilde{r}\tilde{a}+\tilde{p}\tilde{b}\tilde{u}-\tilde{a}\tilde{q}\tilde{u}-\tilde{b}\tilde{r}\tilde{s}-\tilde{c}\tilde{p}\tilde{t}. \tag{27}$$

Note que en (25) tenemos la suma "$\tilde{a}+\tilde{q}+\tilde{u}$" en el lado derecho, y la suma "$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$" en el lado izquierdo. Y en la ecuación (27) tenemos el término "$-\tilde{a}\tilde{q}\tilde{u}$", entre otros, en el lado derecho, y el producto "$-\lambda_1\lambda_2\lambda_3$" en el lado izquierdo. Lo anterior, unido a la libertad que tenemos para atribuir valores a los parámetros libres, sugiere imponer, en (27), la siguiente relación:

$$\tilde{s}\tilde{c}\tilde{q}+\tilde{t}\tilde{r}\tilde{a}+\tilde{p}\tilde{b}\tilde{u}-\tilde{b}\tilde{r}\tilde{s}-\tilde{c}\tilde{p}\tilde{t}=0 \tag{28}$$

de modo que (27) se reduce a,

$$-\,\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3=-\,\tilde{a}\;\tilde{q}\;\tilde{u}, \tag{29}$$

Así, a partir de (25) y (29), podemos considerar, por ejemplo, la siguiente asignación de valores:

$$\tilde{a} = \lambda_1 \ , \ \tilde{q} = \lambda_2 \ , \ \tilde{u} = \lambda_3. \tag{30}$$

Observemos ahora que, como consecuencia de (30), debemos imponer en la expresión (26) que se cumple lo siguiente:

$$\tilde{s}\tilde{c} + \tilde{t}\tilde{r} + \tilde{p}\tilde{b} = 0, \tag{31}$$

con lo cual (26) se verifica idénticamente, considerando (30):

$$\lambda_1 \ \lambda_2 + \lambda_1 \ \lambda_3 + \lambda_2 \ \lambda_3 = \tilde{a}\tilde{u} + \tilde{q}\tilde{u} + \tilde{a}\tilde{q},$$

Por otro lado, elegimos libremente los valores:

$$\tilde{c} = 1, \ \tilde{r} = 1, \ \tilde{b} = 1, \tag{32}$$

con lo cual tenemos que (31) se reduce a:

$$\tilde{s} = -\tilde{t} - \tilde{p} \ . \tag{33}$$

Volviendo a la expresión (28) y sustituyendo en esta los valores (32) y la expresión (33), tenemos,

$$-(\tilde{t} + \tilde{p})\tilde{q} + \tilde{t}\tilde{a} + \tilde{p}\tilde{u} + (\tilde{t} + \tilde{p}) - \tilde{p}\tilde{t} = 0, \tag{34}$$

de donde aislamos $\tilde{p}$, obteniendo:

$$\tilde{p} = \frac{\tilde{t}(\lambda_1 - \lambda_2 + 1)}{\lambda_2 - \lambda_3 + \tilde{t} - 1} \ . \tag{35}$$

Podemos atribuir el valor $\tilde{t} = 1$; luego, con los demás valores asignados, hemos definido una matriz $B + T$, siendo los valores λ_1, λ_2 y λ_3 elegidos libremente.

$$B + T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 1 \\ \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + 1}{\lambda_2 - \lambda_3} & \lambda_2 & 1 \\ \frac{\lambda_3 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_3} & 1 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 \neq \lambda_3, \tag{36}$$

lo que evidentemente corresponde a una situación con una *ruptura* (al menos) *parcial* de la degeneración inicial, que tenía grado tres. Además, se puede comprobar, resolviendo el correspondiente problema directo, que los valores propios de la matriz en (36) son λ_1, λ_2 y λ_3, como se esperaba.

Veamos a continuación un ejemplo numérico de una matriz con la forma (36). Tomemos como B la matriz dada al final de la sección 2 (representada por B_1) y los valores $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 4$ (para la matriz $B_1 + T_1$). Así, pasamos de B_1, que presenta, por imposición inicial, valores propios *triplemente* degenerados, a la matriz suma $B_1 + T_1$, que presenta, también por imposición, valores propios *doblemente* degenerados. Explícitamente tenemos:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad B_1 + T_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

Por otro lado, según la mecánica cuántica, en un átomo (por ejemplo, con espín electrónico total nulo), la contribución resultante de su simetría geométrica (esférica) a la degeneración total de su espectro energético no es la más importante. En el tratamiento estándar de un sistema cuántico donde actúa un potencial central, se manifiestan degeneraciones ligadas al hecho matemático de que ciertos operadores (definidos en función del momento angular) no conmutan entre sí, pero conmutan con el hamiltoniano cuántico correspondiente. En la simulación considerada, la matriz T_1 anterior correspondería al agente externo (campo magnético) que *rompe la degeneración* vinculada a la simetría esférica, pero no rompe otras degeneraciones presentes en el espectro de energía.

3.3. O caso (iii)

Aquí aprovechamos directamente el resultado (36), encontrado en la sección anterior, para construir una situación con *ruptura total* de la degeneración de los valores propios λ como resultado de sumar una matriz, designada por L, a la matriz B.

A continuación se muestra un ejemplo numérico de una matriz con la forma (36), pero, esta vez, sumando a B una matriz L, de modo que la suma de estas tenga todos sus valores propios distintos, por ejemplo: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 4$. Así, pasamos de B_1, que tiene *degeneración triple* de sus valores propios, a la matriz suma, $B_1 + L_1$, que tiene degeneración cero. Explícitamente tenemos:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad B_1 + L_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \tag{38}$$

Notar que:

$$det\Big(B_1 + L_1 - \lambda_i I\Big) = det\begin{pmatrix} 2-\lambda_i & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda_i & 1 \\ -1 & 1 & 4-\lambda_i \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1,2,3.$$

se cumple para $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 4$, separadamente; correspondiendo así con una *ruptura total* de la degeneración inicial.

Observación 1. La idea de *romper la degeneración* de las energías, ligada a la ruptura de una simetría, es muy útil en la física contemporánea. Por ejemplo, el hecho de que hasta la fecha no se haya encontrado evidencia experimental de la existencia de "partículas" previstas teóricamente, como el *selectrón*, que tendría la misma masa (o energía, según la equivalencia $E = mc^2$) que la del elétron, pero con espín cero, a diferencia del espín 1/2 del elétron, estaría indicando, dentro de un determinado contexto físico, que la *simetría* subyacente no es exacta, sino que estaria rota, de modo que la energía del *selectrón* correspondería a un valor distinto, muy alto, en relación con la energía (masa) del electrón; tan alto que el *selectrón* sería indetectable para la actual escala de energías disponible experimentalmente.

4. Conclusiones

Construimos una simulación matemática para la versión más simple del efecto Zeeman de un campo magnético. Se consideró un tratamiento matricial de un problema inverso, el cual consiste en determinar una matriz a partir de los valores propios que se desea que ésta presente. Construída una matriz con triple degeneración de sus valores propios, consideramos tres casos: (i) preservación de la degeneración inicial agregando una matriz C; (ii) ruptura parcial la degeneración inicial agregando una matriz T y (iii) ruptura completa de la degeneración inicial agregando una matriz L. Se presentaron argumentos físicos correspondientes a lo simulado.

Referencias

[1] E.P. Lewis, *The Effects of a Magnetic Field on radiation. Memoirs by Faraday, Kerr and Zeeman*, reprint, Isha Books, New Delhi, 2013.
[2] J.C. Maxwell, *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, Volume 2, Cambridge University Press, 1890.
[3] P. Zeeman, "On the influence of magnetism on the nature of the light emitted by a substance," *Philosophical Magazine*, Series 5, 43, 226, 1897.
[4] P. Zeeman, "Doublets and Triplets in the spectrum produced by external magnetic forces," *Philosophical Magazine*, Series 5, 43, 55 and 255, 1897.
[5] D.I. Blokhintsev, *Quantum Mechanics*, Springer, 1964.
[6] T.P. Weissert, *The Genesis of Simulation in Dynamics: Pursuing the Fermi-Pasta-Ulam Problem*, Springer, 1997.
[7] S.L. Braunstein, C.M. Caves, R. Jozsa, N. Linden, S. Popescu, and R. Schack, "Separability of very noisy mixed states and implications for NMR quantum computing," *Phys. Rev. Lett.*, 83, 1054, 1999.
[8] J.D. Bulnes, I.S. Oliveira, "Construction of solutions for Stern-Gerlach Effect," *Brazilian Journal of Physics*, 2001.
[9] J.O. Stenflo, "History of Solar Magnetic Fields since George Ellery Hale," arXiv:1508.03312v1, 13 Aug 2015.
[10] D.A. Juraev, E.E. Elsayed, J.D. Bulnes, P. Agarwal, R.K. Saeed, "History of ill-posed problems and their application to solve various mathematical problems," *Engineering Applications*, 2(3), 279-290, 2023.
[11] J.D. Bulnes, "Matriz no trivial con autovalores de Stern-Gerlach construida a través de la solución para un problema inverso del álgebra matricial," *Lat. Am. J. Phys. Educ.* 8(2), 359-362, 2014.
[12] A.B. Calado, J.D. Bulnes, "Matrix solution for the inverse problem of classical dynamics of a particle," *Phys Astron Int J.* 7(1), 20-24, 2023.
[13] A. Rangel-Merino, R. Linares y Miranda, J. López-Bonilla, "Genetic Algorithms and the Inverse Problem of Electromagnetic Radiation," *Journal of the Institute of Engineering*, 8(1), 231236, 2011.
[14] Y. Fayziev, Q. Buvaev, D. Juraev, et al., "The inverse problem for determining the source function in the equation with the Riemann-Liouville fractional derivative," *Global and Stochastic Analysis*, 9(2), 4352, 2022.
[15] J. Sivardière, "On the inverse Kepler problem," *European Journal of Physics*, 6, 245248, 1985.
[16] A. Tarantola, "Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation," *SIAM*, 2005.
[17] L.A. Takhtadzhan and L.D. Faddeev, "The Quantum Method of the Inverse Problem and the Heisenberg XYZ Model," *Russian Math. Surveys*, 34(5), 11-68, 1979.
[18] R.M. Santilli, *Foundations of Theoretical Mechanics I. The Inverse Problem in Newtonian Mechanics*, Springer Science, 1978.