

Equação de Von Neumann ou um sistema de N^2 equações acopladas para os elementos de uma matriz densidade de ordem N

Von Neumann equation or a system of N^2 coupled equations for the elements of a density matrix of order N

J.D. Bulnes⁺¹  M.A.I. Travassos⁺⁺²  D.A. Sbrissa^{*3} and J. López-Bonilla^{**4} 

⁺Dep. Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 68903-419, AP, Brasil

⁺⁺Dep. Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 68903-419, AP, Brasil

^{*}Dep. Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 68903-419, AP, Brasil

^{**}ESIME-Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, CDMX, México

Resumo. Neste artigo, consideramos a equação de Von Neumann com o objetivo de redefini-la de tal forma que ela passe de um contexto matricial (com matrizes de dimensão finita de ordem $N \times N$) para um contexto vetorial-matricial, em termos de um vetor coluna (de ordem $N^2 \times 1$) e uma matriz maior (de ordem $N^2 \times N^2$). Com esse procedimento, passamos da equação de Von Neumann para uma equação do tipo "equação de Schroedinger". Para finalizar, consideramos um termo perturbativo no Hamiltoniano inicial e mostramos a solução formal usando a teoria de perturbação de Feynman.

Palavras-chaves. Equação de Von Neumann; Matriz de densidade; teoria de perturbação de Feynman.

Resumo. In this paper, the Von Neumann equation is considered with the purpose of redefining it in such a way that it goes from a matrix context (with finite-dimensional matrices, of order $N \times N$) to a vector-matrix context, in terms of a column vector (of order $N^2 \times 1$) and a larger matrix (of order $N^2 \times N^2$). With this procedure, we go from the Von Neumann equation to an equation that is of the "Schroedinger equation" type. We finish by considering a perturbative term in the initial Hamiltonian and we show the formal solution using Feynman's perturbation theory.

Keywords. Von Neumann equation; Density matrix; Feynman perturbation theory.

¹ e-mail: bulnes@unifap.br

² e-mail: angelicaptravass@gmail.com

³ e-mail: dsbrissa@unifap.br

⁴ e-mail: jlopezb@ipn.mx

Como citar. J.D. Bulnes, M.A.I. Travassos, D.A. Sbrissa y J. López-Bonilla, Equação de Von Neumann ou um sistema de N^2 equações acopladas para os elementos de uma matriz densidade de ordem N . *Jou. Cie. Ing.*, vol. 15, no. 2, pp. 57-63, 2023. doi:10.46571/JCI.2023.2.5

Recibido: 21/10/2023 **Revisado:** 30/11/2023 **Aceptado:** 18/12/2023

1. Introdução

Um dos postulados básicos da mecânica quântica atribui à chamada de *função de onda* toda a informação conhecida sobre um determinado sistema quântico; ainda mais, não somente todo o conhecido senão todo o conhecível sobre o sistema considerado [1, 2, 3]. Aceitando esse postulado, surge imediatamente um dos primeiros problemas (há muito tempo superado) da mecânica quântica: como poderíamos “extrair” informação específica de uma dada função de onda, por exemplo, sobre a segunda componente do momentum angular total do sistema considerado.

Uma função de onda, para um dado instante de tempo, corresponde ao *estado quântico* de um sistema quântico neste instante, mas todos os estados quânticos possíveis dentro da mecânica quântica não se representam por uma função de onda. Somente é possível a representação por funções de onda quando o sistema físico se encontra muito próxima da temperatura de zero absoluto ou quando tenha sido preparado especificamente em um estado puro. Quando um sistema quântico encontra-se em uma situação distinta dessas duas, por exemplo, quando se encontra a temperatura ambiente, o estado dos sistemas quânticos representa-se por uma *matriz densidade*, que obedece a equação de Von Neumann (ou equação de Liouville-Von Neumann) [4].

Uma situação específica onde não é possível descrever nem os estados quânticos nem sua dinâmica pelas correspondentes a uma função de onda se apresenta na computação quântica por ressonância magnética nuclear (RMN) [5, 6]. Um sistema de espin nucleares sensíveis ao fenômeno da RMN tem seus estados quânticos representados por matrizes densidade. Uma situação particularmente interessante, essencial para a execução das tarefas próprias da computação quântica RMN, consiste na preparação de certo tipo de matrizes densidade, as chamadas de *pseudopuras*, que tem sua evolução temporal *como a* de um estado puro [7, 8].

Como mostrado nos livros de texto [9], enquanto um estado puro $|\varphi\rangle$ evolui no tempo, a partir do instante t_0 , de acordo com: $\hat{U}(t-t_0)|\varphi\rangle$, onde $\hat{U}(t-t_0)$ é o operador unitário de evolução temporal, uma matriz densidade ρ , que expressa-se como: $\rho = \sum_j p_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$, evolui no tempo segundo a expressão: $\hat{U}(t-t_0)\rho(t_0)\hat{U}(t-t_0)^\dagger$. As considerações anteriores servem de base para construir a equação de Von Neumann.

De maneira concreta, pode-se dizer que a equação de Von Neumann descreve a dinâmica de um ensemble de partículas quânticas que estão sujeitas a certas interações, definidas pelo hamiltoniano \hat{H} , em termos de uma matriz densidade ρ :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\rho(t), \hat{H}],$$

ou, o que é o mesmo,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{i}{\hbar} (\rho(t)\hat{H} - \hat{H}\rho(t)), \quad (1)$$

ou ainda, pela expressão formal para os seus elementos de matriz,

$$\frac{d}{dt}\rho_{j,l} = \frac{i}{\hbar} \sum_{m=1}^N (\rho_{j,m}H_{m,l} - H_{j,m}\rho_{m,l}). \quad (2)$$

A solução da equação (1), para \hat{H} sendo independente do tempo, escreve-se como [9],

$$\rho(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} \rho(t_0) e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}. \quad (3)$$

Neste artigo, partindo da equação (2), no caso finito dimensional, sendo as matrizes de ordem N , definimos um vetor $\vec{\rho}$, de tamanho $N^2 \times 1$, a partir da matriz ρ , de maneira que expressamos (2) como a derivada de um vetor, e não de uma matriz. Escrevemos a solução formal da equação vetorial-matricial encontrada, equivalente a (2), para o caso $N = 2$. Posteriormente se considera um termo perturbativo no hamiltoniano, o qual se resolve formalmente usando o método perturbativo de Feynman.

2. Desenvolvimento

Vamos definir um vetor $\vec{\rho}$, cujas componentes vamos denotar individualmente por $\tilde{\rho}_k$, $k = 1, \dots, N^2$. Esse vetor é definido a partir dos elementos $\rho_{j,l}$, $i, j = 1, \dots, N$ da matriz densidade ρ , de tamanho $N \times N$. Uma maneira de definir $\vec{\rho}$ consiste em ir tomando, da primeira à N -ésima linha da matriz densidade ρ , e formando (de cima para baixo) o vetor. Com isto, conseguimos a seguinte correspondência entre elementos da matriz ρ com elementos do vetor $\vec{\rho}$:

$$\rho_{j,l} \implies \tilde{\rho}_{l+N(j-1)}. \quad (4)$$

Ou seja, o elemento $\rho_{j,l}$, da matriz ρ , passa a ser o elemento $\tilde{\rho}_{l+N(j-1)}$ do vetor $\vec{\rho}$. Logo, a equação (2) para os elementos da matriz ρ , passa a ter uma forma equivalente para os elementos do vetor $\vec{\rho}$:

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{l+N(j-1)} = \frac{i}{\hbar} \sum_{m=1}^N \left(H_{m,l} \underbrace{\tilde{\rho}_{m+N(j-1)}} - H_{j,m} \underbrace{\tilde{\rho}_{l+N(m-1)}} \right) \quad (5)$$

Reescrevemos, por conveniência, os termos destacados em (5) usando a Delta de Kronecker:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{l+N(j-1)} = \\ & = \frac{i}{\hbar} \sum_{m=1}^N \left(H_{m,l} \left\{ \sum_{s=1}^{N^2} \delta_{m+N(j-1),s} \tilde{\rho}_s \right\} - H_{j,m} \left\{ \sum_{s=1}^{N^2} \delta_{l+N(m-1),s} \tilde{\rho}_s \right\} \right), \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{l+N(j-1)} = \frac{i}{\hbar} \sum_{s=1}^{N^2} \sum_{m=1}^N \left(H_{m,l} \delta_{m+N(j-1),s} - H_{j,m} \delta_{l+N(m-1),s} \right) \tilde{\rho}_s \quad (6)$$

Definindo:

$$M(j, l; s) \equiv \sum_{m=1}^N \left(H_{m,l} \delta_{m+N(j-1),s} - H_{j,m} \delta_{l+N(m-1),s} \right) \quad (7)$$

podemos escrever (5) de maneira compacta:

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{l+N(j-1)} = \frac{i}{\hbar} \sum_{s=1}^{N^2} M(j, l; s) \tilde{\rho}_s, \quad (8)$$

que representa um conjunto de N^2 equações diferenciais ordinárias acopladas de primeira ordem para as componentes do vetor $\vec{\rho}$.

3. O sistema de equações e sua solução para o caso com $N = 2$

Aqui, a partir das expressões em (8), escrevemos as equações diferenciais acopladas específicas no caso com $N = 2$ e apresentamos sua solução formal para uma matriz hamiltoniana arbitrária de ordem N , consistentemente com a abordagem sendo considerada.

3.1. Determinação das equações diferenciais acopladas

Até aqui temos que para uma matriz densidade ρ , de ordem $N = 2$, com elementos de matriz $\rho_{j,l}$, corresponde um vetor $\vec{\rho}$, de maneira que ao elemento de matriz $\rho_{j,l}$ corresponde o elemento $\tilde{\rho}_{l+N(j-1)}$ do vetor $\vec{\rho}$. As equações para cada um dos quatro elementos do vetor escrevem-se como segue:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_{l+2(j-1)} = \frac{i}{\hbar} \sum_{s=1}^4 M(j, l; s) \tilde{\rho}_s \quad (9)$$

De (7), com $N = 2$, $1 \leq j \leq 2$, $1 \leq l \leq 2$, obtemos todos os possíveis valores de $M(j, l; s)$:

$$\begin{aligned} M(1, 1; 1) &= 0; & M(1, 1; 2) &= H_{2,1}; & M(1, 1; 3) &= -H_{1,2}; \\ M(1, 1; 4) &= 0; & M(1, 2; 1) &= H_{1,2}; & M(1, 2; 2) &= -H_{1,1} + H_{2,2}; \\ & & M(1, 2; 3) &= 0; & M(1, 2; 4) &= -H_{1,2}; \\ M(2, 1; 1) &= -H_{2,1}; & M(2, 1; 2) &= 0; & M(2, 1; 3) &= H_{1,1} - H_{2,2}; \\ & & M(2, 1; 4) &= H_{2,1}; & M(2, 2; 1) &= 0; & M(2, 2; 2) &= -H_{2,1}; \\ & & & & M(2, 2; 3) &= H_{1,2}; & M(2, 2; 4) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

De outro lado, temos o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

Com $j = 1, l = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_{l+2(j-1)} &= \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_1 = \frac{i}{\hbar} \sum_{s=1}^4 M(1, 1; s) \tilde{\rho}_s \\ \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_1 &= \frac{i}{\hbar} \left(M(1, 1; 1)\tilde{\rho}_1 + M(1, 1; 2)\tilde{\rho}_2 + M(1, 1; 3)\tilde{\rho}_3 + M(1, 1; 4)\tilde{\rho}_4 \right) \\ \implies \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_1 &= \frac{i}{\hbar} \left(H_{2,1}\tilde{\rho}_2 - H_{1,2}\tilde{\rho}_3 \right), \end{aligned} \quad (11)$$

com $j = 1, l = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_{l+2(j-1)} &= \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_2 = \frac{i}{\hbar} \sum_{s=1}^4 M(1, 2; s) \tilde{\rho}_s \\ \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_2 &= \frac{i}{\hbar} \left(M(1, 2; 1)\tilde{\rho}_1 + M(1, 2; 2)\tilde{\rho}_2 + M(1, 2; 3)\tilde{\rho}_3 + M(1, 2; 4)\tilde{\rho}_4 \right) \\ \implies \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_2 &= \frac{i}{\hbar} \left(H_{1,2}\tilde{\rho}_1 + (-H_{1,1} + H_{2,2})\tilde{\rho}_2 - H_{1,2}\tilde{\rho}_4 \right), \end{aligned} \quad (12)$$

com $j = 2, l = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_{l+2(j-1)} &= \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_3 = \frac{i}{\hbar} \sum_{s=1}^4 M(2, 1; s) \tilde{\rho}_s \\ \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_3 &= \frac{i}{\hbar} \left(M(2, 1; 1)\tilde{\rho}_1 + M(2, 1; 2)\tilde{\rho}_2 + M(2, 1; 3)\tilde{\rho}_3 + M(2, 1; 4)\tilde{\rho}_4 \right) \\ \implies \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_3 &= \frac{i}{\hbar} \left(-H_{2,1}\tilde{\rho}_1 + (H_{1,1} - H_{2,2})\tilde{\rho}_3 + H_{2,1}\tilde{\rho}_4 \right), \end{aligned} \quad (13)$$

com $j = 2, l = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{l+2(j-1)} &= \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_4 = \frac{i}{\hbar} \sum_{s=1}^4 M(2, 2; s) \tilde{\rho}_s \\ \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_4 &= \frac{i}{\hbar} \left(M(2, 2; 1) \tilde{\rho}_1 + M(2, 2; 2) \tilde{\rho}_2 + M(2, 2; 3) \tilde{\rho}_3 + M(2, 2; 4) \tilde{\rho}_4 \right) \\ \implies \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_4 &= \frac{i}{\hbar} \left(-H_{2,1} \tilde{\rho}_2 + H_{1,2} \tilde{\rho}_3 \right). \end{aligned} \quad (14)$$

3.2. Solução formal do sistema de equações com $N = 2$

As equações (3.1), (11), (12), (13) podem se escrever, em formato matricial, como segue,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_1 \\ \tilde{\rho}_2 \\ \tilde{\rho}_3 \\ \tilde{\rho}_4 \end{pmatrix} = \frac{i}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & H_{2,1} & -H_{1,2} & 0 \\ H_{1,2} & -H_{1,1} + H_{2,2} & 0 & -H_{1,2} \\ -H_{2,1} & 0 & H_{1,1} - H_{2,2} & H_{2,1} \\ 0 & -H_{2,1} & H_{1,2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_1 \\ \tilde{\rho}_2 \\ \tilde{\rho}_3 \\ \tilde{\rho}_4 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

A pesar da escrita $d\vec{\rho}/dt$ em (15) ser correta, no que segue optamos pelo símbolo “ ∂ ” para referirmos à derivada temporal correspondente. Com isto escrevemos (15) da seguinte maneira compacta:

$$\partial \vec{\rho}(t) = \frac{i}{\hbar} G \vec{\rho}(t), \quad (16)$$

equação que tem certa semelhança externa com a equação de Schroedinger. A solução formal de (15) escreve-se como,

$$\vec{\rho}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)G} \vec{\rho}(t_0), \quad (17)$$

ou também,

$$\vec{\rho}(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i(t-t_0)/\hbar)^k}{k!} G^k \right) \vec{\rho}(t_0).$$

Para determinar uma solução específica de (17) temos que conhecer o hamiltoniano do sistema quântico, que assume-se independente do tempo, e então, a partir da matriz G , determinar os seus autovalores. Nessa situação, surgem dois possíveis casos: (i) quando os autovalores da matriz G são todos distintos, então esta matriz poderia ser diagonalizada por uma matriz não singular P , de maneira que

$$P^{-1}GP = D \implies P^{-1}G^kP = D^k \implies G^k = PD^kP^{-1},$$

ou, (ii) quando existem autovalores degenerados para G , pode-se construir a *matriz canônica de Jordan*, J , semelhante com G , tal que,

$$Q^{-1}GQ = J \implies Q^{-1}G^kQ = J^k \implies G^k = QJ^kQ^{-1},$$

3.3. Um termo perturbativo w no Hamiltoniano

Consideremos o seguinte problema. Suponha que sobre o sistema físico de interesse atua um agente perturbador caracterizado pela função $w(t)$, de maneira que a matriz hamiltoniana \tilde{H} , agora perturbada, escreve-se como,

$$\tilde{H}(t) = H + \epsilon w(t), \quad (18)$$

onde $\epsilon < 1$ é um parâmetro de valor pequeno (o parâmetro perturbativo). Decorre de (18) e da equação matricial (15), ou (16), que a matriz G (de ordem $N^2 \times N^2$) incluirá o termo de perturbação, sendo que agora escreve-se como,

$$\tilde{G}(t) = G + \epsilon W(t), \tag{19}$$

isto é, \tilde{G} é a matriz que surge na nossa abordagem da equação de Von Neumann, no caso perturbativo, em que os elementos da matriz densidade são rearranjados em um vetor. Notar que $W(t)$, distinta de $w(t)$, contém os elementos da matriz $w(t)$, só que distribuídos em uma matriz (de ordem) maior. Logo, no contexto considerado, a equação de Von Neumann escreve-se como,

$$\partial \tilde{\rho}(t) = \frac{i}{\hbar} \left(G + \epsilon W(t) \right) \tilde{\rho}(t), \tag{20}$$

A equação (20) é do *tipo Schroedinger*, mas escrita para uma matriz de ordem $N^2 \times N^2$, maior do que a ordem da matriz hamiltoniana ($N \times N$).

Escrita explicitamente, a equação (20) tem a forma,

$$\begin{aligned} & \partial \left(\tilde{\rho}_1 \quad \tilde{\rho}_2 \quad \tilde{\rho}_3 \quad \tilde{\rho}_4 \right)^T = \\ & \frac{i}{\hbar} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & H_{21} & -H_{12} & 0 \\ H_{12} & -H_{11} + H_{22} & 0 & -H_{12} \\ -H_{21} & 0 & H_{11} - H_{22} & H_{21} \\ 0 & -H_{21} & H_{12} & 0 \end{pmatrix} + \right. \\ & \left. + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & W_{2,1} & -W_{1,2} & 0 \\ W_{1,2} & -W_{1,1} + W_{2,2} & 0 & -W_{1,2} \\ -W_{2,1} & 0 & W_{1,1} - W_{2,2} & W_{2,1} \\ 0 & -W_{2,1} & W_{1,2} & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_1 \\ \tilde{\rho}_2 \\ \tilde{\rho}_3 \\ \tilde{\rho}_4 \end{pmatrix}, \tag{21} \end{aligned}$$

onde o símbolo “ T ” representa a operação transposta de um vetor.

Conhecendo a solução exata para a equação (16), pode-se aproveitar esta solução para construir uma solução aproximada para a equação perturbada (20) através da expansão perturbativa de Feynman, desenvolvida dentro da sua formulação de *path integrals* da mecânica quântica [10]. A solução perturbativa corresponderá a uma determinada ordem de expansão do parâmetro perturbativo.

Nesse desenvolvimento perturbativo, a expressão (3.9) corresponde à denominada solução perturbativa de *ordem zero*, ou seja, na ausência da perturbação,

$$\tilde{\rho}(t, t_0) = \Pi^{(0)}(t) \tilde{\rho}(t_0) \quad \text{sendo:} \quad \Pi^{(0)}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)G}.$$

A solução correspondente a uma expansão perturbativa a *primeira ordem* escreve-se como,

$$\tilde{\rho}(t, t_0) = \Pi^{(1)}(t) \tilde{\rho}(t_0),$$

sendo:

$$\Pi^{(1)}(t, t_0) = \Pi^{(0)}(t, t_0) + \epsilon \int_{t_0}^t dt' \Pi^{(0)}(t, t') W(t') \Pi^{(0)}(t', t_0)$$

e a solução para a expansão perturbativa a *segunda ordem* escreve-se como,

$$\tilde{\rho}(t, t_0) = \Pi^{(2)}(t) \tilde{\rho}(t_0),$$

sendo:

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)}(t, t_0) &= \Pi^{(0)}(t, t_0) + \epsilon \int_{t_0}^t dt' \Pi^{(0)}(t, t') W(t') \Pi^{(0)}(t', t_0) + \\ &+ \epsilon^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \Pi^{(0)}(t, t') W(t') \Pi^{(0)}(t', t'') W(t'') \Pi^{(0)}(t'', t_0), \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Em geral, as soluções perturbativas a *ordem* ν no parâmetro ϵ , escrevem-se formalmente como,

$$\vec{\rho}(t, t_0) = \Pi^{(\nu)}(t) \vec{\rho}(t_0),$$

Observação 1. Resulta evidente que a abordagem que temos considerado neste artigo complicou a solução da equação de Von Neumann. Isso, resulta do fato de termos levado a equação original para uma versão em que incrementou-se a dimensionalidade. No entanto, considerando o rápido progresso da computação quântica e da informação quântica, suspeita-se que não deverá levar muito tempo para que computadores quânticos operativos possam resolver esse tipo de problemas em intervalos de tempo extremamente curtos [11].

4. Conclusão

Temos considerado a equação de Von Neumann redefinindo-a de forma que passe de um contexto unicamente matricial para um contexto vetorial-matricial, em termos de um vetor coluna e uma matriz de maiores dimensões. Com isso, passamos da equação de Von Neumann para uma equação do tipo Schroedinger. Na parte final do artigo, foi considerada a teoria das perturbações de Feynman para o caso em que inclui-se um termo perturbativo no hamiltoniano inicial.

Referências

- [1] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics, Vol. III: Quantum Mechanics*, Basic Books, 2011.
- [2] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics, Vol. 1*, Hermann, 1977.
- [3] A. Peres, *Quantum Physics: Concepts and Methods*, Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [4] D.I. Blokhintsev, *Quantum Mechanics*, Springer, 1964.
- [5] I.S. Oliveira, T.J. Bonagamba, R.S. Sarthour, J.C.C. Freitas, E.R. deAzevedo *NMR Quantum Information Processing*, Elsevier, 2007.
- [6] R.S. Sarthour, J.D. Bulnes, S.B. Belmonte, A.P. Guimarães, I.S. Oliveira, “Computação Quântica via Ressonância Magnética Nuclear”, CBPF-MO-001/02, 2002.
- [7] J.D. Bulnes, L.A. Peche, “Entrelazamiento cuántico espurio con matrices pseudopuras extendidas 4 por 4”, *Revista Mexicana de Física*, 57(3), 188-192, 2011.
- [8] J.D. Bulnes, F.A. Bonk, “A case of spurious quantum entanglement originated by a mathematical property with a non-physical parameter”, *Latin American Journal of Physics Education*, 8(4), 4306-1, 2014.
- [9] C.P. Slichter, *Principle of Magnetic Resonance*, Springer-Verlag, 1989.
- [10] R.P. Feynman, A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, Emended Edition, Dover, 2005.
- [11] F. de Melo, L. Aolita, “Supremacia quântica: A era dos computadores quânticos chegou”, *Ciência Hoje*, 360, Novembro 2019.