

## Dos esferas dieléctricas, con densidades de carga eléctrica $+\rho$ y $-\rho$ , casi superpuestas, y una distribución del tipo $\sigma = \sigma_0 \cos(\theta)$

Two dielectric spheres, with electric charge densities  $+\rho$  and  $-\rho$ , almost superimposed, and a distribution of the type  $\sigma = \sigma_0 \cos(\theta)$

J.D. Bulnes<sup>+</sup> \*  M.A.I. Travassos<sup>+</sup> \*\*  y J. López-Bonilla<sup>\*\*</sup> \* \* \* 

<sup>+</sup>Dep. Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 68903-419, AP, Brasil

<sup>\*\*</sup>ESIME-Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México

**Resumen.** En este artículo presentamos una prueba sencilla de un resultado matemático que algunos libros presentan sin demostración. Se trata de la equivalencia electrostática entre dos distribuciones de carga eléctrica: (1) Por un lado, la resultante de la superposición de dos esferas dieléctricas, con densidades volumétricas de carga eléctrica iguales a  $+\rho$  y  $-\rho$ , respectivamente, una de las cuales ha sido desplazada, una pequeña cantidad finita, con relación a la otra. (2) Por otro lado, una distribución superficial de carga eléctrica cuya densidad superficial está definida por una expresión proporcional al coseno del ángulo medido con relación a la dirección de desplazamiento considerada.

**Palabras Claves.** Electrostática; Equivalencia electrostática; Esfera dieléctrica.

**Abstract.** In this article, we present a simple proof of a mathematical result that is presented in some books without proof. This is the electrostatic equivalence between two distributions of electrical charge: (1) On the one hand, the one resulting from the superposition of two dielectric spheres, with volumetric densities of electrical charge equal to  $+\rho$  and  $-\rho$ , one of which has been displaced, by a small amount, in relation to the other. (2) On the other hand, a superficial distribution of electrical charge whose surface density is defined by an expression proportional to the cosine of the inclined angle in relation to the considered orientation direction.

**Keywords.** Electrostatics; Electrostatic equivalence; Dielectric sphere.

**Como citar.** J.D. Bulnes, M.A.I. Travassos y J. López-Bonilla, Dos esferas dieléctricas, con densidades de carga eléctrica  $+\rho$  y  $-\rho$ , casi superpuestas, y una distribución del tipo  $\sigma = \sigma_0 \cos(\theta)$ . *Jou. Cie. Ing.*, vol. 16, no. 1, pp. 26-32, 2024. doi:10.46571/JCI.2024.1.4

**Recibido:** 01/04/2024    **Revisado:** 02/06/2024    **Aceptado:** 16/06/2024

\* e-mail: [bulnes@unifap.br](mailto:bulnes@unifap.br)

\*\*e-mail: [angelicaptravass@gmail.com](mailto:angelicaptravass@gmail.com)

\* \*e-mail: [jlopezb@ipn.mx](mailto:jlopezb@ipn.mx)

## 1. Introducción

En los libros dedicados a la electrodinámica de Maxwell encontramos diversas informaciones sobre los fenómenos electromagnéticos que admiten un tratamiento clásico, dentro de un régimen lineal, cuyas ecuaciones dinámicas son invariantes en relación a determinadas transformaciones, donde las energías de las partículas no son altas, en los que los campos oscilantes tienen frecuencias de oscilación que no son demasiado grandes y las cargas ( $\rho$ ) y las corrientes ( $\vec{j}$ ) eléctricas corresponden a la de los electrones (fermiones con espín  $S = 1/2$ ) y no a otras partículas cargadas eléctricamente (como piones, kaones, etc.), o a otros portadores de carga eléctrica (como pares de Cooper, etc.), entre otras características. En esos libros, en general, poco o nada se menciona sobre los diversos fenómenos electromagnéticos que no se encuadran dentro de los límites de aplicación de la teoría de Maxwell o sobre las diversas teorías electrodinámicas que, de cierta manera, extienden la teoría de Maxwell.

El mismo tipo de omisión se nota en la literatura que se ocupa de la mecánica clásica. A propósito, este año se han cumplido 50 años desde el descubrimiento del primer pulsar binario (PSR 1913+16), por R. Hulse y J. Taylor [1]. Lo muy interesante en relación a ese descubrimiento, es que quedaron en evidencia grandes desviaciones en las previsiones de la ley de gravitación *universal* de Newton para ese sistema binario. Así, quedó claro, que la ley de gravitación de Newton no tiene una cobertura universal; o, si se prefiere, la “perdió cuando se descubrió que el universo no presenta apenas manifestaciones *lineales* de la gravitación, en las que la ley de Newton es correcta. Eso no debería ser sorprendente, pues la linealidad embutida en la ley de gravitación de Newton no es suficiente para explicar correctamente las manifestaciones vinculadas con un régimen *no lineal* de la gravitación, como en el caso del sistema PSR 1913+16.

No sólo se trata de la ausencia de algunas pequeñas informaciones en los libros, que deberían ser suficientes para que se pueda apreciar que existen límites específicos en la aplicación de las teorías físicas. En el caso de los libros de electrodinámica clásica, hay, al menos, un resultado matemático presentado sin demostración desde la aparición de [2, 3], en los años 1960, que tampoco aparece demostrado en libros lanzados posteriormente. Y no se trata de un resultado sobre la teoría electrodinámica, sino, algo más simple, sobre electrostática. Aquí veremos eso.

### 1.1. Un resultado sin demostración

En el segundo volumen de la colección *The Feynman Lectures on Physics*, dedicado al Electromagnetismo [2], y también en el libro *Electricity and Magnetism*, de la colección *Berkeley Physics Course* [3], se incluyen, sin demostración, el siguiente resultado:

Considere dos esferas dieléctricas (del mismo radio  $R$ ) con cargas eléctricas uniformemente distribuidas por todo su volumen, con densidad volumétrica  $+\rho$  y  $-\rho$ , ubicadas de manera que sus centros geométricos coinciden espacialmente, resultando en una distribución con carga eléctrica total nula.

A continuación, una de las esferas es desplazada, en relación a la otra, a lo largo de una dirección radial cualquiera, que vamos a denominar  $Z$ , por una distancia muy *pequeña*, que representaremos por  $\varepsilon$ , de manera que  $\varepsilon \ll R$ . Como resultado del desplazamiento relativo, existe una distribución de carga “sobrante”, que no es compensada por la carga opuesta, tanto en la parte superior como en la inferior, a lo largo de  $Z$  (ver la Fig.1).

Esa distribución es equivalente, desde el punto de vista electrostático, a una distribución de carga superficial del tipo  $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ , siendo  $\theta$  la medida angular correspondiente al ángulo definido por la dirección radial para el elemento de carga superficial considerado y la dirección  $Z$  (ver la Fig. 2), con  $\sigma_0$  una constante positiva. En este artículo obtenemos ese resultado bajo ciertos argumentos razonables.

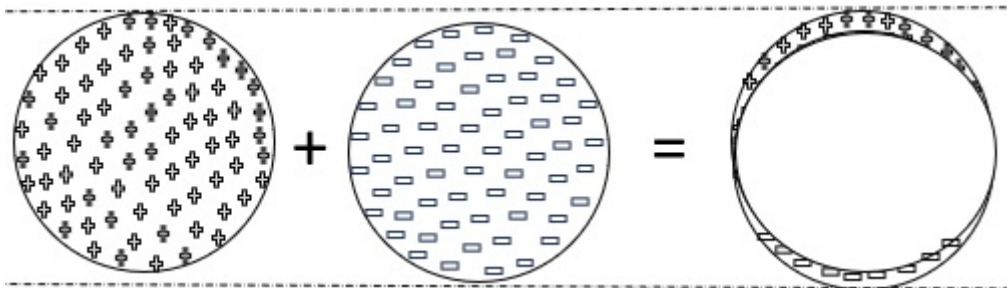


Figura 1: Secciones de dos esferas dieléctricas, con densidades volumétricas de carga eléctrica iguales a  $+\rho$  (a la izquierda) y  $-\rho$  (en el centro), que al ser superpuestas con un desplazamiento “pequeño.<sup>a</sup> lo largo de la vertical, resulta en un exceso de carga eléctrica positiva (parte superior) y negativa (parte inferior), como en la figura a la derecha. Las líneas punteadas ayudan a visualizar el desplazamiento relativo.

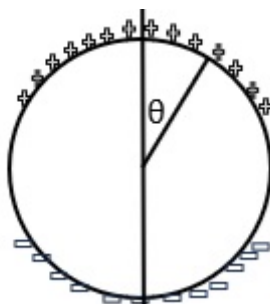


Figura 2: Sección de una esfera mostrando esquemáticamente la distribución de una carga eléctrica superficial que tiene densidad (de carga) positiva máxima para  $\theta = 0$ , nula para  $\theta = \pi/2$  y densidad negativa máxima para  $\theta = \pi$ .

## 2. Desarrollo

Conviene caracterizar geoméricamente la situación en la que están superpuestas dos esferas dieléctricas con un ligero desplazamiento relativo a lo largo de la vertical, lo que se ilustra en la figura 3.

Considere el primer octante de la esfera dieléctrica en que está distribuída una densidad de carga eléctrica positiva,  $+\rho$ , como se muestra en la figura 3. En esa figura, el octante de la esfera con distribución de carga negativa,  $-\rho$ , está desplazada verticalmente hacia abajo, por una cantidad pequeña y el volumen comprendido entre las superficies de estos octantes está en color amarillo, que corresponde a una carga positiva no compensada. Dentro de ese “volumen amarillo” se muestra un pequeño cubo cuyo elemento de superficie ha sido destacado. El volumen (en blanco) dentro de ese octante corresponde a la superposición de las cargas positivas y negativas.

La figura 4 corresponde a la intersección del octante considerado en la figura 3 con el plano definido por los vectores  $\hat{u}$  y  $\hat{k}$ . En la figura 4 fueron dibujadas algunas líneas auxiliares ( $S$  y  $S_-$ , además de un radio separado de la vertical por un ángulo  $\theta$ ), se identificaron algunas regiones de interés (cada una con la forma de un “perfil de cuña curvada”, denominados  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ ) y puntos característicos ( $P_\theta$ ,  $N_\theta$  y  $M_\theta$ ) que resultan de la intersección del radio (que hace un ángulo arbitrario  $\theta$  con la vertical) con las líneas curvas ya mencionadas;  $R$  es el radio (del octante) de la esfera  $+\rho$  y  $\varepsilon$  la magnitud del desplazamiento producido.

La caracterización anterior es adecuada para establecer una correspondencia *uno a uno* entre

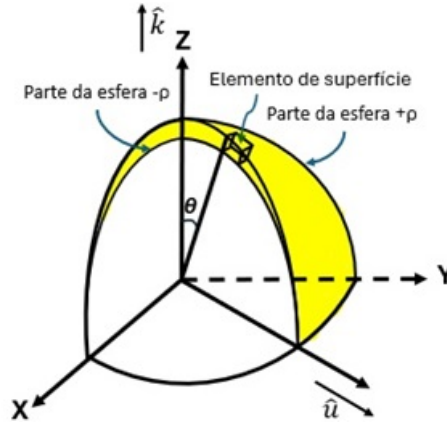


Figura 3: Es mostrado un corte, por el plano definido por  $\hat{k}$  y  $\hat{u}$ , en el primer octante de  $+\rho$ . Es destacado, en color amarillo, el exceso de carga positiva. En color blanco, en el interior del octante  $+\rho$ , están superpuestas  $+\rho$  y  $-\rho$ .

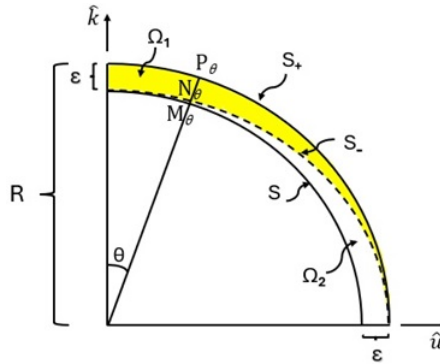


Figura 4: Caracterización geométrica del corte mencionado en la figura 3.

todo ángulo  $\theta$ , variando de  $0$  a  $\pi/2$  radianes, y el segmento radial  $P_\theta N_\theta$ , entre  $S_+$  y  $S_-$ . En otras palabras, se puede definir una función real de variable real  $f$  tal que a cada valor de  $\theta$  le corresponde la longitud del segmento radial indicado:  $f(\theta) =$  longitud del segmento radial cuyos extremos son los puntos  $N_\theta$  y  $P_\theta$ . Notar que:  $f(0) = \epsilon$  y que, bajo la condición de desplazamiento “suficientemente pequeño” (ver Apéndice), tenemos:  $f(\pi/2) = 0$ . Podemos definir también una función  $g$  tal que:

$$f(\theta) + g(\theta) = \epsilon, \quad \in [0, \pi/2]. \quad (1)$$

Para un desplazamiento suficientemente pequeño podemos considerar como coincidentes, en la figura 4, los puntos de intersección de cada uno de los arcos  $S_+$  y  $S_-$  con la dirección horizontal definida por el vector  $\hat{u}$ , que en la figura 7 son identificados por  $T$  y  $G$ , respectivamente (ver Apéndice 2). El sector triangular curvilíneo (o perfil de cuña curvado)  $\Omega_1$  entre  $S_+$  y  $S_-$  es, más o menos, de la misma forma que el sector triangular curvilíneo  $\Omega_2$ , comprendido entre  $S_-$  y  $S$ , con la diferencia que este se encuentra invertido en relación al otro. Vemos, además de eso, que ambas cuñas tienen un lado de longitud  $\epsilon$ , ambas comparten el arco  $S_-$  y, además,  $S_+$  es de mayor longitud que  $S$ . Lo anterior parece compatible con lo siguiente: área (de  $\Omega_1$ )  $>$  área (de  $\Omega_2$ ), lo que, a su vez, puede expresarse de la siguiente manera:

Si imaginamos una situación en la que se invierte  $\Omega_2$ , en relación a  $\Omega_1$ , tenemos que  $f(\theta)$  sería ligeramente mayor que el correspondiente segmento, en relación al mismo  $\theta$ , sobre  $\Omega_2$  y ésto

para todo ángulo  $\theta \in [0, \pi/2]$ . Todo continuando en su lugar, tenemos, con base al argumento anterior, que,

$$f(\theta) > g\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \quad \theta \in \langle 0, \pi/2 \rangle. \quad (2)$$

Además, el comportamiento de  $f(\theta)$  en relación a  $\theta$ , cuando varía desde 0 a  $\pi/2$ , es suave y decreciente. En consecuencia, el gráfico de  $f$  puede ser aproximado por uno entre los tres siguientes (ver figura 5):

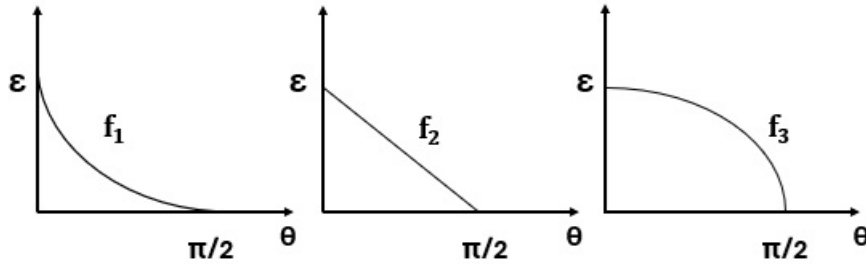


Figura 5: La la función  $f$  podría corresponder, aproximadamente, a una de las tres curvas mostradas.

Con las expresiones (1) y (2) se puede identificar cuál es la gráfica correspondiente a la función  $f$ . En la figura 6 se construyen dos triángulos iguales, pequeños, mostrados en la esquina superior

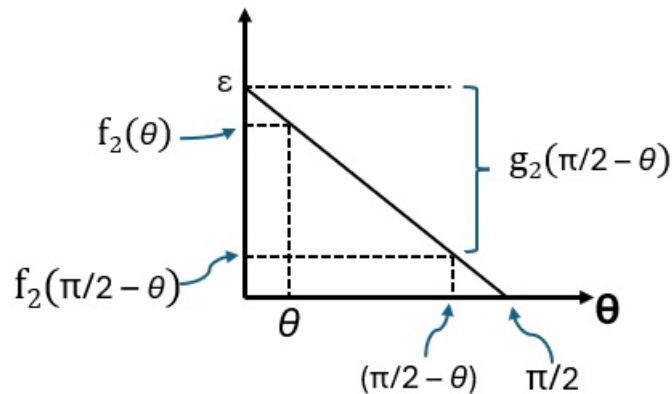


Figura 6: La curva correspondiente a la función  $f_2$ , mostrada inicialmente en la figura 5, y algunos puntos y valores destacados.

y en la esquina inferior derecha. De las relaciones geométricas mostradas en esta figura, resulta ser correcta la siguiente igualdad:

$$f_2(\theta) = g_2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \quad \theta \in [0, \pi/2]. \quad (3)$$

Si sobre la figura 6 se superpone la gráfica de  $f_3$  podemos ver fácilmente que se cumple:

$$f_3(\theta) > f_2(\theta) = g_2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) > g_3\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right). \quad (4)$$

Por lo tanto:

$$f_3(\theta) > g_3\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \quad (5)$$

la que es compatible con la relación (2). Luego,  $f_3$  es la gráfica de la función buscada. Una aproximación a la curva  $f_3$ , en  $\langle 0, \pi/2 \rangle$ , es:

$$f_3(\theta) = \varepsilon \cos\theta. \quad (6)$$

Solamente ahora estamos en condiciones de determinar cuál es la carga que está dentro del elemento de volumen en la región (en amarillo, en la figura 3) de carga eléctrica no compensada:

$$dq = \rho dv = \rho f(\theta) ds = \rho \varepsilon \cos\theta ds. \quad (7)$$

Si observásemos el elemento de carga que está dentro del elemento de volumen desde una distancia  $d \ll \varepsilon$  tendríamos que las tapas superior e inferior de ese elemento de volumen se verían prácticamente al mismo nivel; es decir, la carga parecerá ubicada sobre el respectivo elemento de superficie. En ese caso, escribimos:

$$dq = \sigma ds,$$

Entonces tenemos:  $\sigma = \rho \varepsilon \cos\theta$ , o también:

$$\sigma = \sigma_0 \cos\theta, \quad (8)$$

con  $\sigma_0 = \rho \varepsilon$ . Así, hemos verificado que el resultado que acabamos de obtener no es exacto, pero es una buena aproximación cuando el desplazamiento relativo  $\varepsilon$  es muy “pequeño.” en relación al radio de las esferas.

### 3. Conclusión

Hemos demostrado que dos esferas dieléctricas, con densidades volumétricas uniformes de carga eléctrica iguales a  $+\rho$  e  $-\rho$ , superpuestas con un pequeño desplazamiento relativo  $\varepsilon$ , a lo largo de dirección vertical equivale a una distribución superficial de carga eléctrica do tipo:  $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$ , con  $\sigma_0$  una constante positiva.

### Referencias

- [1] J.M. Weisberg, J.H. Taylor, “The Relativistic Binary Pulsar B1913+16: Thirty Years of Observations and Analysis”, *Binary Radio Pulsars, ASP Conference Series*, 328, 2005.
- [2] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, “Electromagnetism and Matter”, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley, 1964.
- [3] E. Purcell, “Electricity and Magnetism”, *Berkeley Physics Course*, McGraw-Hill, 1967.

### Apéndice

En la figura 7, que complementa la figura 4, se muestran los puntos  $G$  y  $T$ , correspondientes a la intersección de  $S_-$  con la línea horizontal mostrada en la figura 4, y la intersección de la semicircunferencia  $+\rho$  con el radio horizontal, respectivamente.

Representando por  $\tau$  la distancia entre los puntos  $G$  y  $T$  tenemos, de la figura 7, que:

$$\tau = R - R \cos(\phi), \quad (9)$$

Pero, de la geometría mostrada en la misma figura, tenemos:

$$\cos \varphi = \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{R^2}\right)^{1/2}, \quad (10)$$

entonces, de (10) en (9), escribimos,

$$\tau = R - \left(R^2 - \varepsilon^2\right)^{1/2}. \quad (11)$$

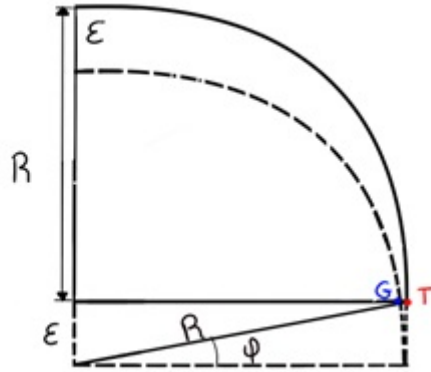


Figura 7: Relaciones geométricas complementarias que ayudan a establecer bajo qué condiciones los puntos  $G$  y  $T$  pueden ser considerados casi coincidentes, lo que es fundamental en la demostración presentada.

Escribiendo, para  $n \in \mathbf{N}$ , que:  $\epsilon = R/n$ , tenemos,

$$\tau = R - R\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}. \tag{12}$$

Consideramos  $n \gg 1$ , pues  $\epsilon$  debe ser muy pequeño. Así, la expansión en serie del binomio en (12) es:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{8n^4} + \dots \tag{13}$$

Entonces  $\tau$ , en (12), considerando hasta el segundo término de la serie (13), se escribe como,

$$\tau \approx R - R\left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) \approx \frac{R}{2n^2}. \tag{14}$$

y como  $R = n\epsilon$ , tenemos que,

$$\tau \approx \frac{\epsilon}{2n}. \tag{15}$$

Entonces, tomando como ejemplo:  $R = 1m$ ,  $\epsilon = 1mm$ , resulta que el valor de  $\tau$  es igual a  $0,5\mu m$ . En una situación como esa podemos considerar que los puntos  $G$  y  $T$  son prácticamente coincidentes; es en este sentido, es que la expresión ambigua “suficientemente pequeño”, para  $\epsilon$ , adquiere un significado claro.