Journal de Ciencia e Ingeniería, vol.16, no2,pp.15-18, 2024
http://jci.uniautonoma.edu.co
DOI: https://doi.org/10.46571/JCI.2024.2.3

Corporación Universitaria Autónoma del Cauca
ISSN 2145-2628, e-ISSN 2539-066X
Mecânica Quântica

Um aspecto da relação entre as equações de Schrödinger e Korteweg-de Vries

An aspect of the relationship between the Schrodinger and Korteweg-de Vries equations

J.D. Bulnes[+1] M.A.I. Travassos[*2] and J. López-Bonilla[3]**
[+]Dep. Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 68903-419, AP, Brasil
[*]Dep. Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 68903-419, AP, Brasil
[**]ESIME-Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional , Edif. 4, 1er.Piso, Col. Lindavista CP 07738, CDMX, México

Resumo. Neste artigo, considerando a equaçõ de Schrödinger usual, no caso unidimensional, e assumindo uma certa expressão formal para o potencial, que é escrita em termos de funções de onda, identificamos qual seria a equaçõ complementar a ser verificada por ditas funções, o que levaria o potencial a ser uma soluçõ da equaçõ de Korteweg-de Vries (KdV).

Palavras Chaves. Equação de Schrödinger; Equação de Korteweg-de Vries.

Abstract. In this paper, considering the usual Schrödinger equation, in the one-dimensional case, and assuming a certain formal expression for the potential, which is written in terms of wave functions, we identify what would be the complementary equation to be verified by said functions, which would lead the potential to be a solution of the Korteweg-de Vries (KdV) equation.

Keywords. Schrödinger equation; Korteweg-de Vries equation.

Como citar. J.D. Bulnes, M.A.I. Travassos and J. López-Bonilla. Um aspecto da relação entre as equações de Schrödinger e Korteweg-de Vries. *Jou. Cie. Ing.*, vol. 16, no. 2, pp. 15-18, 2024. doi:10.46571/JCI.2024.2.3

Received: 10/07/2024 **Reviewed:** 14/08/2024 **Accepted:** 25/10/2024

1. Introdução

O problema originalmente investigado por E. Fermi, J. Pasta e S. Ulam (problema FPU), da distribuição de energia dependente do tempo, entre os diferentes modos de oscilação de um conjunto de osciladores unidimensionais que interagem fracamente e não linearmente

[1] *e-mail: bulnes@unifap.br*
[2] *e-mail: angelicaptravass@gmail.com*
[3] *e-mail: jlopezb@ipn.mx*

entre vizinhos, [1, 2], o qual constitui a primeira simulação computacional de um sólido cristalino 1-dimensional, está matematicamente relacionado, sob certas condições, com a equação diferencial não linear que foi originalmente derivada por D. Korteweg e G. de Vries (equação KdV), a qual descreve a dinâmica de ondas longas e não lineares que se propagam em um tanque de água estreito e raso [3].

A equação de Korteweg-de Vries (KdV), que dependente de um parâmetro λ, escreve-se como segue:

$$U_t(x,t) \; - \; \lambda U(x,t)\Big(DU(x,t)\Big) \; + \; D^3U(x,t) \; = \; 0$$

onde o subíndice "t", como em U_t, denota derivação em relação à variável de tempo; o símbolo D representa a derivada em relação à variável de coordenada espacial x. O caso usual da ecuação KdV corresponde a $\lambda = 6$. Para $\lambda \neq 0$, a solução da equação acima escreve-se como:

$$U(x,t) = \frac{3v}{\lambda} Sech^2\Big(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\Big) \; ,$$

sendo v a rapidez de propagação da onda ou pulso não linear, se propagando ao longo da direção de coordenadas x. Notar que a amplitude de $U(x,t)$ seria significativa inclusive quando o termo não linear for pequeno (λ pequeno), o que revela um aspecto da natureza não linear da propagação.

Por outro lado, a chamada de equação de Schrödinger não linear [4], que também vincula-se com a equação KdV, escreve-se como:

$$-\,\frac{\hbar^2}{2m}D^2\,\phi \;\pm g|\phi|^2\phi \; = \; i\hbar\phi_t \; .$$

Neste breve artigo consideramos a equação de Schroedinger linear, escrita a partir da correspondente equação estacionária, no caso 1-dimensional. Sob certas suposições, veremos como o potencial $V(x,t)$, na equação de Schroedinger, poderia verificar a equação KdV.

2. Desenvolvimento matemático

Considere a equação de Schrödinger (escrita a partir da equação estacionária 1-dimensional que, só por simplicidade, será escrita sem incluir o coeficiente $-\hbar^2/2m$),

$$D^2\Psi_k(x,t) - \Big(V(x,t) - E_k\Big)\Psi_k(x,t) = 0 \; , \tag{1}$$

sendo $V(x,t)$ um dado potencial dependente da variável de posição x e da variável de tempo t, com E_k correspondendo às eigenenergias do sistema que esteja sendo considerado.

Assumindo que o potencial seja especial ao ponto de poder-se expressar, pelo menos aproximadamente, como:

$$V(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \Psi_k^2(x,t) \; , \tag{2}$$

que é uma expressão unicamente formal, pois ainda não estão definidas as funções Ψ_k. Com base em (2) temos os seguintes resultados:

$$DV(x,t) = \sum_{k=1}^{N} 2\Psi_k(x,t)D\Psi_k(x,t) \; , \tag{3}$$

$$D^2V(x,t) = 2\sum_{k=1}^{N}\left(\Psi_k(x,t)D^2\Psi_k(x,t) + \Big(D\Psi_k(x,t)\Big)^2\right). \tag{4}$$

As expressões (4), juntamente com a (1), dão lugar ao resultado:

$$D^2V(x,t) = 2\sum_{k=1}^{N}\left\{\Psi_k(x,t)\Big(V(x,t) - E_k\Big)\Psi_k(x,t) + \Big(D\Psi_k(x,t)\Big)^2\right\}, \tag{5}$$

ou também,

$$D^2V(x,t) = 2\sum_{k=1}^{N}\left\{\Big(V(x,t) - E_k\Big)\Psi_k^2(x,t) + \Big(D\Psi_k(x,t)\Big)^2\right\}. \tag{6}$$

De (6) conseguimos a expressão para a terceira derivada espacial do potencial,

$$D^3V(x,t) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{N}\left\{\Big(DV(x,t)\Big)\Psi_k^2(x,t) + \Big(V(x,t) - E_k\Big)2\Psi_k\Big(D\Psi_k\Big) + 2\Big(D\Psi_k\Big)\Big(D^2\Psi_k\Big)\right\} \tag{7}$$

$$= 2\Big(\sum_{k=1}^{N}\Psi_k^2\Big)DV(x,t) + 4\sum_{k=1}^{N}\Big(V(x,t) - E_k\Big)\Psi_k\Big(D\Psi_k\Big) + 4\sum_{k=1}^{N}\Big(D\Psi_k\Big)\Big(V(x,t) - E_k\Big)\Psi_k \tag{8}$$

$$= 2V(x,t)\Big(DV(x,t)\Big) + 8\sum_{k=1}^{N}\Big(V(x,t) - E_k\Big)\Psi_k\Big(D\Psi_k\Big) \tag{9}$$

Reescrevendo, obtemos:

$$D^3V(x,t) =$$

$$= 2V(x,t)\Big(DV(x,t)\Big) + 4\Big(\sum_{k=1}^{N}2\Psi_k\Big(D\Psi_k\Big)\Big)V(x,t) - 8\sum_{k=1}^{N}E_k\Psi_k\Big(D\Psi_k\Big) \tag{10}$$

$$= 2V(x,t)\Big(DV(x,t)\Big) + 4\Big(DV(x,t)\Big)V(x,t) - 8\sum_{k=1}^{N}E_k\Psi_k\Big(D\Psi_k\Big) \tag{11}$$

Assim, chega-se a:

$$D^3V(x,t) \;-\; 6V(x,t)\Big(DV(x,t)\Big) \;+\; \sum_{k=1}^{N}8E_k\Psi_k\Big(D\Psi_k\Big) = 0. \tag{12}$$

Ademais, a equação diferencial de Korteweg-de Vries usual, escreve-se como:

$$U_t(x,t) \;-\; 6U(x,t)\Big(DU(x,t)\Big) \;+\; D^3U(x,t) \;=\; 0. \tag{13}$$

Logo, comparando as equações (12) e (13), temos que se $V_t(x,t)$ poder-se-ia expressar como:

$$V_t(x,t) = \sum_{k=1}^{N}8E_k\Psi_k(x,t)\Big(D\Psi_k(x,t)\Big). \tag{14}$$

Então poderíamos afirmar que o potencial $V(x,t)$, expresso como em (2), seria solução da equação de Korteweg-de Vries (escrita para $V(x,t)$), mas isso não poderia acontecer com $\Psi_k(x,t)$

sendo apenas solução da equação (1), teriamos que identificar uma equação complementar para esta. Vejamos isso.

De (2) temos:

$$V_t(x,t) = \sum_{k=1}^{N} 2\Psi_k(x,t)\Big(\Psi_k(x,t)\Big)_t \tag{15}$$

Então, de (14) e (15), vamos exigir que se cumpra,

$$\sum_{k=1}^{N} \Big\{ 2\Psi_k(x,t)\Big(\Psi_k(x,t)\Big)_t - 8E_k\Psi_k(x,t)\Big(D\Psi_k(x,t)\Big) \Big\} = 0. \tag{16}$$

ou,

$$\sum_{k=1}^{N} 2\Psi_k(x,t) \Big\{ \Big(\Psi_k(x,t)\Big)_t - 4E_k\Big(D\Psi_k(x,t)\Big) \Big\} = 0. \tag{17}$$

Portanto, a equação complementar a ser satisfeita pelas funções Ψ_k, de maneira que $V(x,t)$ satisfaça a equação de Korteweg-de Vries, é a que segue:

$$4E_k\Big(D\Psi_k(x,t)\Big) - \Big(\Psi_k(x,t)\Big)_t = 0, \tag{18}$$

que é do tipo linear, em derivadas parciais e de primeira ordem.

3. Conclusão

Em princípio, temos que resolvendo a equação (18), com os coeficientes numéricos E_k tomados como sendo livres, as funções Ψ_k que se encontrariam iriam definir o potencial $V(x,t)$ através da expressão (2). Depois de inserir esse potencial em (1), a equação de Schrödinger fica bem definida; então, as soluções desta equação que (acaso) coincidirem com as da equação (18), seriam as soluções físicas compatíveis com o contexto aqui considerado.

Referências

[1] E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, "Studies of nonlinear problems I", *Los Alamos report* LA-1940, 1955.

[2] G. Gallavotti, *The Fermi-Pasta-Ulam. A Status Report*, Springer, Berlin, 2008.

[3] D.J. Kordeweg, G. de Vries, "On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves", *Phil. Mag.*, (5)39, 422, 1895.

[4] W. Galléas, L.H. Ymai, P.L. Natti, E.R. Takano Natti, "Ondas do tipo Sóliton em Guias Dielétricos", *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 25(3), Setembro, 2003.