Journal de Ciencia e Ingeniería, vol.16, no 2, pp. 27-32, 2024
http://jci.uniautonoma.edu.co
DOI: https://doi.org/10.46571/JCI.2024.2.6

Journal de Ciencia e Ingeniería

Corporación Universitaria Autónoma del Cauca
ISSN 2145-2628, e-ISSN 2539-066X
Mecânica Clássica

Tratamento matricial para o pêndulo simples e a manifestação de uma degenerescência

Matrix treatment for the simple pendulum and the manifestation of a degeneration

J.D. Bulnes[+1], **M.A.I. Travassos**[+2], **H.E. Caicedo-Ortiz**[*⋆3] **y J. López-Bonilla**[**4]

[+] **Dep. Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 68903-419, AP, Brasil**

[*] **Corporación Universitaria Autónoma del Cauca, Colombia**

[⋆] **Universidad Autónoma de la Ciudad de México, México**

[**] **ESIME-Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México**

Abstract. In this paper, we consider a matrix approach to the simple pendulum system. Specifically, we define the following inverse problem: Construct a "mass matrix" whose eigenvalues correspond to the value of the mass of the pendulum particle. In subsequent development, we find solutions with degeneracy in the eigenvalues of the mass matrix.

Keywords. Newton's second law equation; Matrix approach; Mass matrix; Eigenvalue degeneracy.

Resumo. Neste artigo consideramos uma abordagem matricial para o sistema pêndulo simples. Especificamente, definimos o seguinte problema inverso: construir uma "matriz de massa" cujos autovalores correspondem ao valor da massa da partícula pendular. No desenvolvimento, encontramos soluções com degenerescência nos autovalores de massa para o pêndulo simples.

Palavras Chaves. Equação da segunda lei de Newton; Abordagem matricial; Matriz de massa; Degenerescência de autovalores.

Como citar. J.D. Bulnes, M.A.I. Travassos, H.E. Caicedo-Ortiz and y J. López-Bonilla. On a coefficient identity for powers of Taylor series *Jou. Cie. Ing.*, vol. 16, no. 2, pp. 27-32, 2024. doi:10.46571/JCI.2024.2.6

Recebido: 10/09/2024 **Revisado:** 25/11/2024 **Aceito:** 4/12/2024

1 *e-mail: bulnes@unifap.br*
2 *e-mail: angelicaptravass@gmail.com*
3 ⋆ *Profesor Invitado Externo*
4 *e-mail: jlopezb@ipn.mx*

1. Introdução

Uma característica geral e importante das teorias físicas é sua compatibilidade com pequenas variantes no tratamento de certo tipo de problemas [1] [2] [3] [4] [5] ou, de maneira mais significativa, com abordagens alternativas, mas equivalentes, nas que, adotando contextos e ferramentas matemáticas distintas às usuais, poder-se-ia destacar melhor algum aspecto físico que não seria igualmente apreciado através de uma teoria equivalente.

Outro tipo de característica, que eventualmente aparece entre as propriedades matematicas desses modelos ou teorias, refere-se à existencia de certas propriedades que não poderiam ser colocadas em correspondência com nenhuma *propriedade física* do sistema do mundo físico que modela-se. Nesse caso, fala-se de propriedades espurias, de propriedades puramente matemáticas, ou de propriedades apenas do modelo.

1.1. Vestidura matricial para a equação da segunda lei de Newton

Considere a equação da segunda lei de Newton, que, como todos sabemos bien, é apresentada em formato vetorial (como corresponde) em relação a um RIT[5], para uma partícula com massa constante m sobre a qual atúa uma força $\vec{f}$, como segue:

$$m\vec{a} = \vec{f}\,, \tag{1}$$

No entanto, essa expressão pode ser substituida por uma equivalente, escrita em um formato *matricial.* Assim, pode-se reescrever a equação acima na forma:

$$M\vec{a} = \vec{f}\,, \tag{2}$$

sendo M uma matriz, em principio desconhecida, que, necessariamente, tem a massa (m) da partícula considerada como seu autovalor; ou seja:

$$M\vec{a} = m\vec{a}\,. \tag{3}$$

Essa representação (ou vestidura) matricial, que foi usada previamente [6], leva ao seguinte resultado interessante:

$$M\vec{a} = \vec{f} \quad \Longrightarrow \quad M(m\vec{a}) = m\vec{f} \quad \Longrightarrow \quad M\vec{f} = m\vec{f}\,, \tag{4}$$

ou seja, a força $\vec{f}$ atuante sobre a partícula corresponde ao autovetor[6] de M associado com o autovalor m. É interessante notar que, assim como a massa a e força (m e $\vec{f}$) determinam a aceleração $\vec{a}$ da partícula, temos que no contexto matricial, entendido como um *problema inverso*, os mesmos determinam a matriz de massa M, mas não de maneira univoca.

Por outro lado, é evidente que usando o formato matricial pode-se carregar mais informação na expressão dessa lei que usando o formato vetorial. Usando esta abordagem matricial, veremos que uma degenerescência será revelada no caso do sistema pêndulo simples (veja a próxima seção); então, surge a pergunta: tal degenerescência tem origem física ou apenas matemática?

Nosso problema, correspondente à categoria dos problemas ditos de *problemas inversos*, é o seguinte: Dados a massa e a força atuante sobre a partícula considerada, quer-se determinar uma matriz M (que chamamos "matriz de massa"), tal que estes correspondam, por livre imposição, a seu autovalor e seu autovetor, respectivamente; ou seja:

$$M\vec{f} = m\vec{f}\,. \tag{5}$$

[5] RIT = Referencial Inercial Terrestre.

[6] A aceleração $\vec{a}$ é um autovetor linearmente dependente de $\vec{f}$.

Notar que o vetor $\vec{f}$ acima (correspondente à força resultante sobre a partícula) passaria a ser um vetor nulo se pudessemos "desligar" a propriedade "massa" do sistema físico considerado (o pêndulo simples), mas isso corresponderia, do lado matemático, a uma situação em que existe a inversa de uma matriz $(M - \beta I)$, para números β adequados, de maneira que: $(M - \beta I)\vec{y} = \vec{0}$, implica no resultado: $\vec{y} = \vec{0}$.

2. O caso do pêndulo simples

Consideremos um pêndulo simples clássico, como mostrado na figura 1, onde o extremo superior do fio do pêndulo está afixado na origem de um sistema de direções de coordenadas XY.

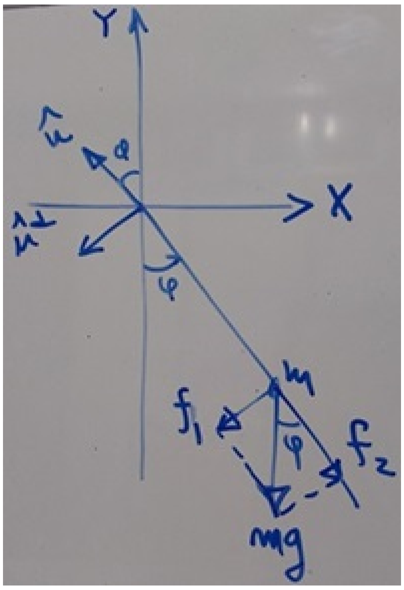

Figure 1: Por simplicidade, para não sobrecarregar a figura, a tensão no fio não foi representada.

Em relação ao sistema de coordenadas mostrado na figura 1, escrevemos os vetores $\hat{u}$ e $\hat{u}^{\perp}$, unitários e ortogonais entre si, como:

$$\hat{u} = -\,\hat{\imath}sin\varphi + \hat{\jmath}cos\varphi \;, \tag{6}$$

$$\hat{u}^{\perp} = -\,\hat{\imath}cos\varphi - \hat{\jmath}sin\varphi \;, \tag{7}$$

A força resultante sobre a partícula, $f_1\hat{u}^{\perp}$ expressa-se como:

$$\vec{f_1} = f_1\;\hat{u}^{\perp} = mg\;sin\theta\;\hat{u}^{\perp} = -\;mg\;sin\theta \begin{bmatrix} cos\theta \\ \\ sin\theta \end{bmatrix} . \tag{8}$$

2.1. Construindo uma matriz de massa como em um problema inverso

Sejam p, q, r, s, números reais correspondentes aos elementos da matriz de massa M; assim, escrevemos,

$$M = \begin{bmatrix} p & q \\ \\ r & s \end{bmatrix} , \tag{9}$$

Então, pela imposição acima considerada, temos:

$$M\vec{f_1} = m\vec{f_1} \ , \tag{10}$$

ou, equivalentemente, considerando: $m \neq 0$, $g \neq 0$ e a figura 1, obtemos as seguintes equações:

$$p \ sin\theta \ cos\theta + q \ sin^2\theta \ = \ m \ sin\theta \ cos\theta, \tag{11}$$

$$r \ sin\theta \ cos\theta + s \ sin^2\theta \ = \ m \ sin^2\theta \ . \tag{12}$$

Para $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi/2$, temos:

$$p \ + q \ tan\theta \ = \ m \qquad \Longrightarrow \qquad p = m - q \ tan\theta \ , \tag{13}$$

$$r \ + s \ tan\theta \ = \ m \ tan\theta \qquad \Longrightarrow \qquad r = (m - s) \ tan\theta \ . \tag{14}$$

Assim, conseguimos a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} m - q \ tan\theta & q \\ (m - s) \ tan\theta & s \end{bmatrix} , \tag{15}$$

onde q e s permanecem (até aqui) como parâmetros livres.

Como um assunto de consistência, resolvamos o correspondente *problema direto*. Determinemos os autovalores de M impondo a equação característica:

$$\Big| \ M - \lambda I \ \Big| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} m - qtan\theta - \lambda & q \\ (m - s)tan\theta & s - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

ou,

$$\lambda^2 - (m + s - q \ tan\theta)\lambda + m(s - q \ tan\theta) = 0. \tag{17}$$

de onde encontra-se que:

$$\lambda = \Big\{ m + s - q \ tan\theta \ \pm \ (\Delta)^{1/2} \Big\}/2 \ , \tag{18}$$

com $\Delta = (m - s + q \ tan\theta)^2$. Assim, obtemos os autovalores:

$$\lambda_1 = m, \qquad \& \qquad \lambda_2(\theta) = s - q \ tan\theta \ . \tag{19}$$

Como os autovalores de M correspondem, no contexto aqui considerado, ao parâmetro de massa (que assume-se constante) da "partícula pendular", deve-se escolher $q = 0$, pois não poderia estar mudando a massa conforme muda o ângulo do pêndulo no seu movimento. Fazendo isso, temos: $\lambda_2 = s = m'$; ou seja,

$$\lambda_1 = m, \qquad \& \qquad \lambda_2 = m' \ . \tag{20}$$

Assim, considerando nesta etapa o correspondente *problema direito*, temos conseguido fixar mais um parâmetro, sobrando apenas um parâmetro livre s (ou m').

A matriz assume a forma simplificada,

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ (m - m') \ tan\theta & m' \end{bmatrix} . \tag{21}$$

Verifiquemos, também, pelo cálculo do *problema direto*, com M uma matriz conhecida, qual o autovetor correspondente a partir de λ genêrico. Então temos:

$$\Big(M - \lambda I\Big)\vec{x} = \vec{0}\,. \tag{22}$$

ou explicitamente,

$$\begin{bmatrix} m-\lambda & 0 \\ (m-m')\; tan\theta & m'-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Então temos:

$$(m-\lambda)\,x + 0\,y = 0 \qquad \& \qquad (m-m')\,x\;tan\theta + (m'-\lambda)\,y = 0 \tag{24}$$

(i) **Para o autovalor** $\lambda = m$ (e supondo $m' = m$), temos que:

$$x \text{ é livre} \qquad \& \qquad y \text{ é livre} \tag{25}$$

então, escolhendo: $x = -\,mg\;sin\theta\;cos\theta$ e $y = -\,mg\;sin^2\theta$, temos:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\,mg\;sin\theta \begin{bmatrix} cos\theta \\ sin\theta \end{bmatrix} = \vec{f_1}\;, \tag{26}$$

(ii) **Para o autovalor** $\lambda = m$ (e supondo $m' \neq m$), temos que:

$$x \text{ é livre} \qquad \& \qquad y = x\;tan\theta\;, \tag{27}$$

então, escolhendo: $x = -\,mg\;sin\theta\;cos\theta$, decorre que: $y = -\,mg\;sin^2\theta$; assim, temos:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\,mg\;sin\theta \begin{bmatrix} cos\theta \\ sin\theta \end{bmatrix} = \vec{f_1}\;, \tag{28}$$

(iii) **Para o autovalor** $\lambda = m'$ (e supondo $m' = m$), temos que:

$$x \text{ é livre} \qquad \& \qquad y \text{ é livre}\,. \tag{29}$$

(iv) **Para o autovalor** $\lambda = m'$ (e supondo $m' \neq m$), temos que:

$$x = 0 \qquad \& \qquad y \text{ é livre}\,. \tag{30}$$

Este caso não corresponde com um resultado esperado ($x = 0$), no entanto, $\lambda = m'$ é correto; assim, conclui-se desta que m' tem que ser igual a m.

Destacamos o fato que os casos (i), (iii) e (iv) são compatíveis com uma situação de degenerescência, que parece esperada (considerando que no caso do pêndulo simples a massa tem valor único, mas arbitrário), a mesma que, em principio, não poderia ser quebrada, pois não podemos "desligar" da partícula a sua propriedade "massa".

2.2. O caso (matemático) com força resultante nula sobre o pêndulo
Determinemos a seguir quais valores numéricos β são tais que à matriz M corresponda um autovetor nulo (força resultante nula); isto é, temos de determinar quais valores de β são compatíveis com:

$$M\vec{y} = \beta\vec{y} \; , \quad \text{com: } \; \vec{y} = \vec{0} \; . \tag{31}$$

o que resultaria de $det(M - \beta I) \neq 0$. Então, usando a matriz M encontra-se:

$$det(M - \beta I) = (m - \beta)(m' - \beta) \; , \tag{32}$$

que é distinto do zero para $\beta \neq m$ e $\beta \neq m'$, simultaneamente, o que é compatível com a quebra da degenerêscencia dos autovalores de M; não entanto, essa quebra não pode ser realizada pelo "desligamento" (impossível) da propriedade massa da partícula pendular; isso, no entanto, não invalida a degenerescência em si mesma.

3. Conclusão

Temos mostrado que o tratamento matricial para o pêndulo simples clássico é compatível com uma situação de degenerescência dos autovalores da (que temos definido como a) matriz de massa. Podemos considerar este pequeno artigo como um aporte motivacional para desenvolver uma abordagem matricial ampla para os problemas da mecânica clássica.

Referencias

[1] J.D. Bulnes, Revista Mexicana de Física E, **55**(1) (2009) 3443.
[2] J.D. Bulnes, D.A. Juraev, J. López-Bonilla, M.A.I. Travassos, Stochastic Modelling and Computational Sciences, **3**(1) (2023) 23-28.
[3] J.D. Bulnes, Global and Stochastic Analysis, **9**(2) (2022) 89-97.
[4] J.D. Bulnes, J. Dantas-Rocha, J.L. López-Bonilla, R. Sivaraman, Journal de Ciencia e Ingeniería, **15**(1) (2023) 17-27.
[5] J.D. Bulnes, L.A. Peche, Revista Mexicana de Física, **57**(3) (2011) 188192.
[6] J.D. Bulnes, J.L. López-Bonilla, Maltepe Journal of Mathematics, **4**(2) (2022) 38-43.